

## ニュートン法

まず、複素力学系の理論の生まれるきっかけとなったニュートン法について復習しておきたいと思います。与えられた関数  $f(x)$  について、方程式  $f(x)=0$  の解  $a$  を求めたいとします。そこで、初期値(初項)  $x_0$  は適当に定めるものとして、数列  $x_0, x_1, x_2, \dots$  を、次のような漸化式で帰納的に定義していきます。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$x_{n+1}$  は「 $x = x_n$  における曲線  $y = f(x)$  の接線」と「 $x$  軸」との交点の座標となっています(図3)。

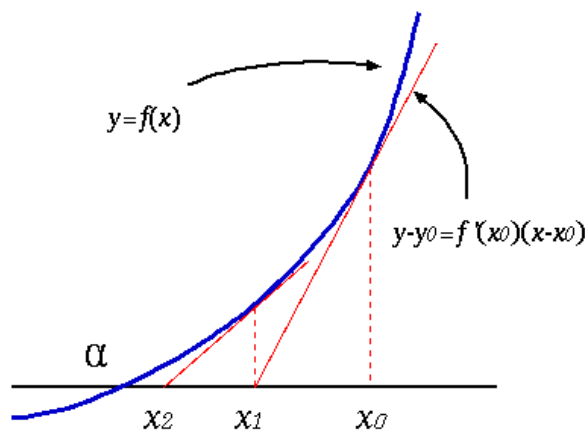


図3 ニュートン法

この図をみると、初期値  $x_0$  が十分  $a$  に近ければ、 $x_n$  は  $a$  に収束することが分ります。このようにして方程式  $f(x)=0$  の解の値を求める方法をニュートン法といいます。ただし、 $a$  から遠くの点を初期値としたときには数列  $x_n$  が  $a$  に収束するとは限りませんし、一般には、方程式  $f(x)=0$  の解は一つとは限りません。そこで、初期値  $x_0$  をどの範囲からとるとき、数列  $x_n$  がどの解に収束するのか、或はどこにも収束しないのかを見極めたいと思うのは自然なことといえます。 それでは、早速、簡単な関数を例にとって考えてみましょう。

以上は、実数の世界でのお話でしたが、複素数の範囲まで世界を広げて考えると、話が俄然面白くなりますから、初期値  $z_0$  は複素数とし、 $f(z)$  は変数が複素数で値も複素数であるような関数(写像)であるとして話をすすめます。複素数の全体は平面(複素平面)と同じものだとみなせましたから、 $f(z)$  は平面の点に平面の点に対応させる写像と考えることができます。

例1  $f(z) = z^2 - 1$  の場合

漸化式は

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n} = \frac{1}{2} \left( z_n + \frac{1}{z_n} \right)$$

となります。方程式  $f(z) = 0$  の解は1と-1ですから、初期値  $z_0$  が  $y$  軸よりも右側にあれば (図4の赤い部分)、 $z_0$  は-1より1に近いので、 $z_n$  は1に収束し、同様に、 $y$  軸よりも左側にあれば(図4の緑の部分)、-1に収束すると予想されます。実際、そのとおりになります。

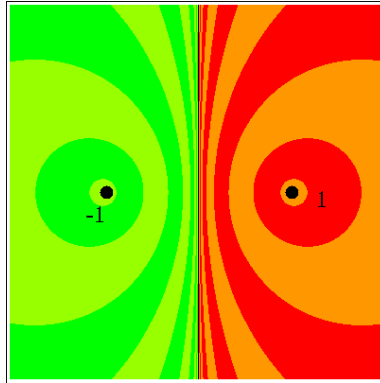


図4

例2  $f(z) = z^3 - 1$  の場合

漸化式は

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} = \frac{1}{3} \left( 2z_n + \frac{1}{z_n^2} \right)$$

となります。今度は、方程式  $f(z) = 0$  の解は1,  $w$ ,  $w^2$  ( $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ) の3個で、これら

の点は原点中心半径1の円周上にあります。この場合、複素平面上点  $w$ ,  $w^2$  より1に近い点は図5の赤い部分ですから、そこに初期値  $z_0$  を取れば、先の例と同様  $z_n$  は1に収束すると予想できます。

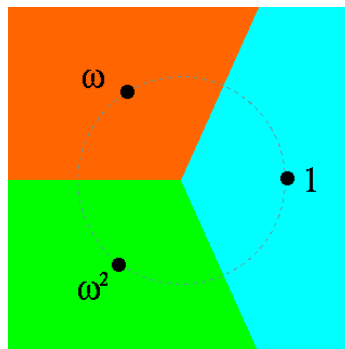


図5 予想

ところが、今回は、予想に反し、 $z_n$  が1 に収束するような初期値  $z_0$  のなす領域は図6(青い部分)のような領域となります。同様に、赤い部分から初期値を取れば  $w$  に、緑の部分から初期値を取れば  $w^2$  に収束することがわかります。これらの領域は、無限個の部分からなり、非常に複雑な形状を持っています。いたるところに相似な図形が潜んでいること(自己相似性)もわかります。また、これら三つの領域が複雑に絡み合っている様子も見て取れます。これら三つの領域は巧みに配置されており、青い部分の境界が実は赤い(緑の)部分の境界とぴったり一致しています。この共通の境界部分(黒い部分)こそ、ケーリー(Cayley)によって1879年に最初に研究されたジュリア集合です。ケーリー自身も図5のようになると考えたようですが、その思いもよらぬ複雑ゆえ、研究を断念せざるをえませんでした。

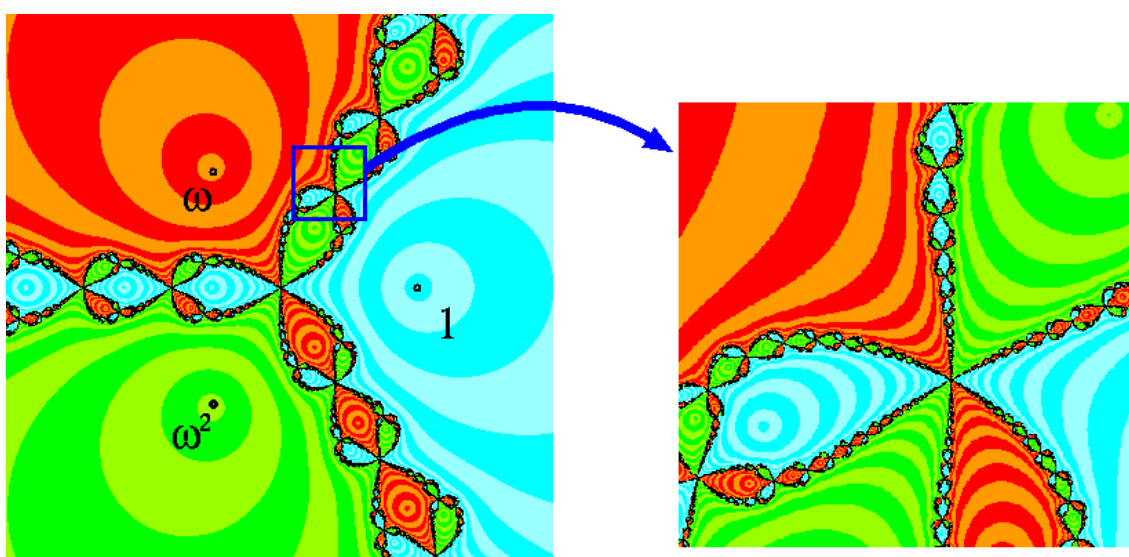


図6

## 複素力学系とは

いま考察したニュートン法は、複素数  $z_0$  にただ一つの関数

$$R(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

を繰り返し作用させることで、数列  $z_n$  を作り出す方法と考えることができます。このように、与えられた関数  $R(z)$  及び初期値  $z_0$  に対し、この関数を繰り返し作用させることで得られる複素数列( $z_0$  の軌道)

$$z_0 \rightarrow R(z_0) \rightarrow R(R(z_0)) \rightarrow R(R(R(z_0))) \rightarrow \dots$$

を考えることを複素力学系と呼んでいます。例えば、図6では、青い部分にある点は時間の経過とともに、点1に吸い込まれていくと考えることができます。このように、複素力学系は、複素平面上の点が、あたかも何らかの力が働いているかのように、押し出されたり吸い寄せられたりする様子をあらわしていると考えられます。それで「力学系」なる言

葉が使われるわけです。

## ジュリア集合とは

以下、簡単のため有理関数(分母分子が多項式の分数関数)  $R(z)$  の複素力学系を考えるものとします。点  $z_0$  の軌道は、もちろん初期値  $z_0$  の選び方に応じて変わります。しかし、初期値  $z_0$  の値をほんのわずかに動かす程度であれば、その軌道もほんのわずかに変化しないのではないかと期待されます。残念ながら、一般には、このようにはなっていません。そこで、この性質を持たない初期値  $z_0$  全体のなす集合を、関数  $R(z)$  のジュリア集合と呼ぶことにします。ジュリア集合の点は、その点のほんのわずかの揺らぎさえ、その点を初期値とする軌道に対して重大な影響を与える(初期値鋭敏性)厄介な点だといえます。

再び、例 2 の場合について考えてみましょう。この場合、図 6 の黒い部分にある点は、ほんの少し位置がずれるだけで、青い領域や赤い領域や緑の領域に入り込んでしまいますから、対応する軌道は 1 に収束したり  $w$  に収束したり  $w^2$  に収束したりすることになります。すなわち、ほんの少し点の位置が揺らぐだけで、軌道は大きく変化してしまうということです。ですから、この場合のジュリア集合は、図 6 の黒い部分となります。直感的には、この場合、ジュリア集合の点からは、同時に 3 方向に点が湧き出していると考えられることができます。(大陸の裂け目を思い浮かべるといいかもしれません。) 実際、一般の有理関数  $R(z)$  に対しても、ジュリア集合の点は、ある意味で湧出口となることが分ります。

このように、ニュートン法を複素力学系の枠組みで考えると、そこで出てきた複雑な図形がジュリア集合として捉えられることがわかりました。一般の関数  $R(z)$  に対しても、そのジュリア集合は、自己相似性を持つ非常に複雑な集合となることが知られています(図 2)。

## マンデルブロー集合とは

特に、二次多項式  $Q_c(z) = z^2 + c$  のジュリア集合を考えます。マンデルブロー集合は、関数  $Q_c(z)$  のもとでの原点 0 の軌道

$$0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

が無限の彼方に発散していかないような  $c$  全体のなす図形(図 1 の緑の部分及びその黒い境界部分)です。これは、 $Q_c(z)$  に対するある特定の点(原点)の軌道を調べているだけなのですが、原点は方程式  $Q_c'(z) = 0$  のただ一つの解であるという特殊な事情により、実は、この特定の軌道の振る舞いが、 $Q_c(z)$  のジュリア集合の様子に決定的に影響することがわかります。実際、 $c$  の値をこのマンデルブロー集合上から取ると  $Q_c(z)$  のジュリア集合は一つにつながった図形となり、マンデルブロー集合の外側から取ると、ばらばらに散らばった図形となることが知られています。具体的に  $c$  の値を 6 個与えて、ジュリア集合がどうなるかを示したのが、図 1 です。図の矢印の指し示す点が  $c$  の値で、赤枠内の黒い部分はそ

の値に対する関数  $Q_c(z)$  のジュリア集合です。

$c = 0$  のときはだけは、そのジュリア集合は簡単に分ります。実際、点  $z$  の軌道は、原点中心半径 1 の円  $J$  を境にして、外側の点の軌道は無限の彼方に飛び去り、内側の点の軌道は原点に近づいていきますから、軌道は  $J$  を境に全く別の振る舞いをします。ですからこの場合  $J$  がジュリア集合となっています。

マンデルブロー集合は二次多項式をその図形的性質により分類した図であると考えられそれ自体はジュリア集合ではありませんが、図 2 はマンデルブロー集合もジュリア集合同様自己相似性を持つことを示しています。