海軍機關學校

微積分教科書

卷之三

第三學年

昭和十二年七月

海軍機關學校長　兼田市郎

昭和十二年七月

本書ニ依リ微積分ヲ修得スヘシ

沿革

第一版　昭和十二年七月　海軍教授　吉松航太郎編纂

微積分

目次

微積分

第七編
微分方程式

第二十一章
微分方程式ト其解

84. 微分方程式及其分類、

自然科學ノ研究ニ於テ獨立變數ト從屬變數トノ關係ハソノ導函數ヲ用ヒテ表現セラレル場合ガ多イ、今化學反應ハソノ濃度ニ比例スルトイフ法則ニ例ヲトルト變化スル物質ノ最初ノ濃度ヲ a トシ t 秒後マデニ其ノ中 x ダケ變化シタトスレバ, 物質ノ濃度ハ $a-x$ トナリ, 之ガソノ反應ノ速度 $\frac{dx}{dt}$ ニ比例スルノデアルカラ

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)\dots\dots\dots\dots(1)$$

ナル關係ヲ得、

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ デアルカラ (1) ヨリ

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{k}\frac{1}{a-x}$$

故ニ

$$t=\frac{1}{k}\int\frac{dx}{a-x}+c$$

即チ $$t=-\frac{1}{k}\log(a-x)+c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

コヽニ c ハ任意ノ常數デアル、

然ルニ最初即チ $t=0$ ナルトキハ $x=0$ デアルカラ (2) ニ於テ $t=0,\ x=0$ トオクト

$$0=-\frac{1}{k}\log a+c$$

故ニ $$c=\frac{1}{k}\log a$$

依ッテ $$kt=\log\frac{a}{a-x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ナル t ト x トノ關係式ヲ得、

(1) ナル如ク二ツノ變數間ノ關係ヲソノ導函數ヲ用ヒテ表ハセル關係式ヲ微分方程式トイヒ, 之ヲ滿足スル二變數間ノ關係式 (2) 又ハ (3) ヲソノ解トイフ、(2) ニ於テ c ニ如何ナル數値ヲ與ヘルモ (1) ナル微分方程式ヲ滿足スルガ自然科學ノ研究ニ於テハ所與ノ條件ニヨリ c ノ適當ナル數値ヲ決定シ例ヘバ (3) ナル關係式ヲ求メネバナラナイ, 然シ本教程ニ於テハ是等ノ問題ニハ觸レズ單ニ微分方程式ノ形式的取扱ヒニツイテ論ズルコトヽスル、

一般ニ獨立變數, 從屬變數及其導函數ノ間ニ一定ノ關係ガ成立スルトキコノ關係式ヲ**微分方程式**トイフ、

例ヘバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+k=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}-z=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$(1+x^2)y^3+x^3(y+1)\frac{dy}{dx}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ハ凡テ微分方程式デアル、

微分方程式ガ唯一種ノ獨立變數ヲ含メバ之ヲ**常微分方程式**トイヒ之ニ反シ少クモ二種以上ノ獨立變數ヲ含メバ之ヲ**偏微分方程式**ト云フ、例ヘバ (4), (5), (7) ハ常微分方程式ニシテ (6) ハ偏微分方程式デアル、

微分方程式ニ含マレル最高次ノ導函數ノ次數ヲ其微分方程式ノ**階數**トイヒ，其微分方程式ヲ導函數ニ關シテ有理方程式ニ書キ直ホシタルトキソノ中ニアル最高次ノ導函數ノ羃指數ヲ其微分方程式ノ**次數**トイフ、例ヘバ (4) ハ二階一次 (6) 及 (7) ハ一階一次デアル、(5) ハ之ヲ $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{dy}{dx}$ ニ關シテ有理方程式ニ書キ直ホシテ二階二次ナルコトヲ知ル、

85. 微分方程式ノ一般解及特殊解、

微分方程式ヲ滿足スル獨立變數ト從屬變數トノ關係式ヲ得ルトキハ微分方程式ヲ解キ得タトイヒ，ソノ關係式ヲ**微分方程式ノ解**トイフ、

最モ簡單ナル微分方程式ハ $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ ニシテ $y=f(x)+c$ ハソノ解デアル，コヽニ c ハ任意常數デアル、

今　　$$F(x, y, c)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ x ニ關シ微分スルト

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \quad\cdots\cdots (2)$$

(1) 及 (2) カラ c ヲ消去スルト

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad\cdots\cdots (3)$$

ナル一階微分方程式ヲ得, (1) ハ之ヲ滿足スルカラ其解デアッテ一ツノ任意常數ヲ含ム。

次ニ $\qquad F(x, y, c_1, c_2)=0 \quad\cdots\cdots (4)$

ヲ二回微分スルト

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \quad\cdots\cdots (5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}=0 \quad\cdots\cdots (6)$$

(4), (5), (6) カラ c_1, c_2 ヲ消去スルト二階微分方程式

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right)=0 \quad\cdots\cdots (7)$$

ヲ得 (4) ハノ解ニシテ二ツノ任意常數 c_1, c_2 ヲ含ム。

一般ニ n 個ノ任意常數 $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ ヲ含ム x ト y トノ關係式

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)=0 \quad\cdots\cdots (8)$$

ヲ n 回微分シテ $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ ヲ消去スルトキハ

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \quad\cdots\cdots (9)$$

ナル n 階微分方程式ヲ得, (8) ハソノ解デアッテ n 個ノ任意常數 $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_n$ ヲ含ム。

一般ニ n 階微分方程式ハ n 個ノ任意常數ヲ含ム解ヲ有ス, カヽル解ヲソノ**一般解**トイヒ, 一般解ノ任意常數ノ若干ニ特殊ナル値ヲ與ヘテ得タルモノヲ**特殊解**トイフ、

例ヘバ前節 (2) 及 (3) ハ共ニ (1) ノ解デアルガ (2) ハ一般解, (3) ハ特殊解デアル、

86. 一階微分方程式ノ解ノ幾何學的意味, 特異解、

一階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ x,y ニ一定ノ數値ヲ與ヘルト $\frac{dy}{dx}$ ノ値ガ定マル、之ヲ幾何學的ニ言ヘバ方程式 (1) ニ依リ平面上ニ點 (x,y) ヲ定メルトソノ點ヲ通ル曲線ノ方向ガ決定スル、今點ノ位置トソノ方向トヲ合セ考ヘタモノヲ**線素**トイフコトヽスレバ (1) ナル微分方程式ハ平面上ニ無限個ノ線素ヲ定義シテヰルコトヽナル、

今 (1) ノ一般解ヲ

$$F(x,y,c)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トスレバ c ノ各値ニ對シテハ (2) ハソレゾレ曲線ヲ表ハスカラ (2) ハ一ツノ曲線群ヲ定義シテ居ル、而シテソレニ屬スル一曲線即チ c ニ特定ノ値ヲ與ヘタモノガ特殊解デアル、ソノ曲線上ニ於テ x,y ノ値ヲ定メルトソレニ對シ y' ノ値ハ定マリ, カカル x,y,y' ノ一組ノ値ハ (1) ヲ滿足スル、サレバ微分方程式 (1) ヲ解クトイフコトハ之ヲ幾何學的ニ考ヘルト (1) ニ依ツテ定義セラレテヰル平面上ノ線素ヲ適當ニ繼ギ合セテ曲線群 (2) ヲ求メルコトデアル、

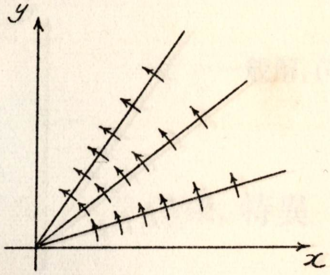
例 1. $$y\frac{dy}{dx}+x=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

(3) ヲ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

ト書キ直ホシ $\frac{x}{y}=a$ トオケバ

$\frac{dy}{dx}=-a$ デアルカラ $\frac{x}{y}=a$ ナル



直線上ノ凡テノ點デ同一ノ方向ヲ有ス、

次ニ (3) ノ一般解ヲ求ムレバ

$$x^2+y^2=c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

デアツテ圖ニ於ケル線素ヲ適當ニ追跡スレバ (4) ナル同心圓群トナル、

例 2. $$y^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

一般解ハ $$(x+c)^2+y^2=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

デアル、然ルニ

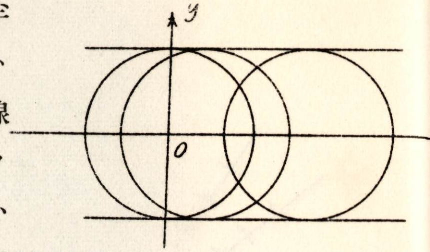
$$y=\pm 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ハ明カニ (5) ヲ滿足スル故ニ其解デアル、然ルニ (6) ニ於テソノ任意常數 c ニ如何ナル値ヲ與ヘテモ (7) ヲ誘導スルコトハ出來ナイ、即チ (7) ハ (5) ノ特殊解デハナイ、

此ノ如ク微分方程式ノ一般解中ニ含マレナイ解ヲ**特異解**トイフ、$y=\pm 1$ ハ (5) ノ特異解デアル、幾何學的ニ之ヲ云ヘバ一般解

$$(x+c)^2+y^2=1$$

ハ x 軸上ニ中心ヲ有シ半徑1ナル圓群デ $y=\pm 1$ ハ之ニ切スル直線即チ包絡線デアル、蓋シ圓群トノソノ包絡線トノ切點ニ於テハ $x, y, \frac{dy}{dx}$ ハ雙方ニ共通デアルカラ $y=\pm 1$ モ亦(5)ノ解デアルコトガ諒解出來ルデアラウ



一般ニ微分方程式ニ於テハ一般解ノ外ニ特異解ナルモノガ存在シ得ルコトニ注意セネバナラナイ、

以上ハ主トシテ常微分方程式ニ就イテ述ベタノデアツテ偏微分方程式ニ於テハ稍ソノ事情ヲ異ニスル、本教程ニ於テハ主トシテ常微分方程式ニ就キテ述ベル、

第二十二章

一階一次微分方程式

一階一次微分方程式ノ一般形ハ

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

デアルガカヽル簡單ナルモノニ就イテモソノ一般的解法ハ存セズ、$f(x,y)$ ガ特殊ノ形ヲトルトキニノミソノ解法ガ存スルノデアッテ以下ソノ標準形ニツキテ論ズル、

87. 變數分離形、

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

コノ場合ニハ微分方程式ヲ次ノ形ニ書キ直ホスコトヲ得、即チ**變數分離形**トイフ、

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}=f(x)$$

依ッテ

$$\int\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx=\int f(x)dx+c$$

即チ

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c$$

〔注意〕 形式的ニハ (1) ヲ次ノ如ク書キ直ホシテ計算スルコトガ出來ル、

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

$$\therefore \qquad \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c$$

例、 $(x^2-yx^2)\dfrac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0$

x^2y^2 デ割レバ

$$\frac{1-y}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1+x}{x^2}=0$$

故ニ
$$\int\frac{1-y}{y^2}\frac{dy}{dx}dx+\int\frac{1+x}{x}dx=c$$

即チ
$$\log\frac{x}{y}-\frac{x+y}{xy}=c$$

問　題

1. 次ノ微分方程式ヲトケ、

(1) $x^3\dfrac{dy}{dx}-(1+x)y^2=0$

(2) $2(1-y^2)xydx+(1+x^2)(1+y^2)dy=0$

(3) $\cos^2x\dfrac{dy}{dx}+\sin x\cos^2y=0$

(4) $(1+xy)y+(1-xy)x\dfrac{dy}{dx}=0$ 〔$xy=z$ トオケ〕

2. 一平面上ニ於テ運動スル質點ノ運動ノ方向ガ常ニ一定點ヨリソノ質點ニ至ル方向ニ垂直デアルトイフ、ソノ質點ノ運動ノ軌跡ヲ求メヨ、

3. 直交軸ニ關シ切線影ノ長サガ一定ナル如キ曲線ヲ求メヨ、

88. 同次形、

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルトキコレヲ**同次形**トイフ、

之ヲ解クニハ

$$\frac{y}{x}=v,\ 即チ\ y=xv$$

ト置ク, 然ルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

デアルカラ (1) ハ

$$v+x\frac{dv}{dx}=f(v)$$

トナリ之ハ變數分離形デアル, 之ヲトキ

$$\log x=\int\frac{dv}{f(v)-v}+c \quad 又ハ \quad x=c_1e^{\int\frac{dv}{f(v)-v}}$$

ヲ得、コレニ於テ v ヲ $\frac{y}{x}$ ト書キ直ホシテ原式ノ解ヲ得、

〔**注意**〕 函數 $f(x,y)$ ニ於テ

$$f(tx,ty)=t^r f(x,y)$$

ナルトキ $f(x,y)$ ヲ **r 次ノ同次函數**デアルトイフ、

今 $\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{Q}(x,y)$ ガ同ジ次數ヲ有スル同次函數ナルキハ微分方程式

$$\mathrm{P}(x,y)+\mathrm{Q}(x,y)\frac{dy}{dx}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ハ (1) ナル形ニ書キ直ホスコトガ出來ル, 即チ (2) ハ同次形デ
アル、

例 1. $(xe^{\frac{y}{x}}+y)dx-xdy=0$

$y=vx$ トオケバ

$$dy=xdv+xdv$$

故ニ $$x(e^v+v)dx-xvdx-x^2dv=0$$

即チ $$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{e^v}=0$$

依ツテ $$\log x+e^{-v}=c$$

即チ $$\log x+e^{-\frac{y}{x}}=c.$$

例 2. $(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C})+(ax+by+c)\dfrac{dy}{dx}=0$

今 $x=x_1+h,\ y=y_1+k$ トオケバ

$$(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{A}h+\mathrm{B}k+\mathrm{C})+(ax_1+by_1+ah+bk+c)\frac{dy_1}{dx_1}=0$$

今 $h,\ k$ ヲ

$$\mathrm{A}h+\mathrm{B}k+\mathrm{C}=0$$
$$ah+bk+c=0$$

ナル如ク定メル即チ

$$h=\frac{\mathrm{B}c-b\mathrm{C}}{\mathrm{A}b-a\mathrm{B}},\ k=\frac{\mathrm{C}a-c\mathrm{A}}{\mathrm{A}b-a\mathrm{B}}$$

トオケバ原微分方程式ハ

$$(\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1)+(ax_1+by_1)\frac{dy_1}{dx_1}=0$$

トナリ同次形デアル、

更ニ一般ニ

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}}{ax+by+c}\right)$$

ナルトキモ同樣ニ

$$x=x_1+h,\ y=y_1+k$$

ナル變換ヲ行ヘバ宜シイ、但シ $h,\ k$ ハ

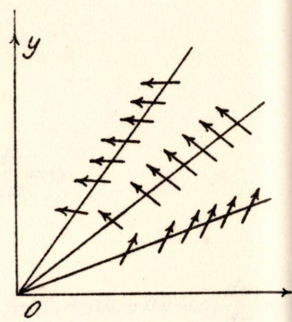
$$\mathrm{A}h+\mathrm{B}k+\mathrm{C}=0,\ ah+bk+c=0$$

ヨリ決定セラレル、

然ルトキハ原方程式ハ

$$\frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1}{ax_1+by_1}\right)$$

トナリ同次形デアル、



〔注意〕 (1) ニ於テ $\dfrac{y}{x}=k$ ト置クトキハ

$$\frac{dy}{dx}=f(k)$$

故ニ原點ヲ通過スル直線トコノ微分方程式ノ一般解ノ表ハス曲線群トハ一定角デ交ハル、從ツテ曲線群ノ各曲線ハ互相似テ原點ニ關シ相以ノ位置ニアル、

問　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ、

1. $2x^2y+3y^3-(x^3+2xy^2)\dfrac{dy}{dx}=0$ 答 $y^2(x^2+y^2)=cx^6$

2. $y^2dx+x(x-y)dy=0$ 答 $y=ce^{\frac{y}{x}}$

3. $\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx-x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$ 答 $\log x-\sin\dfrac{y}{x}=c$

4. $(4x-y+2)dx+(x+y+3)dy=0$

$$\text{答}\quad \tan^{-1}\frac{y+2}{2(x+1)}+\log\{4(x+1)^2+(y+2)^2\}=c$$

5. $(y+2xy^2-x^2y^3)dx+2x^2ydy=0$　　答 $\dfrac{x+x^2y}{1-xy}=c$

〔$xy=v$ トオケ〕

6. 動徑ヲ常ニ一定ノ角デ截ル曲線ヲ求メヨ、

89. 完全微分形、

u ヲ x 及 y ノ函數, c ヲ常數トシ, $u=c$ ナル方程式ヲ x ニ關シテ微分スレバ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

デアル、今與ヘラレタル微分方程式

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\quad\cdots\cdots(2)$$

ナル函數 u ガ存在スルトキハ (1) ノ解ハ明ニ

$$u=c$$

然シ (2) ナル關係ヲ滿足セシメル函數 u ハ必ズシモ常ニ存在スルトハ限ラナイ、若シ之ガ存在スルナラバ (1) ナル微分方程式ヲ完全微分形トイフ、

定理、 微分方程式 (1) ガ完全微分形ナルタメノ必要且十分ナル條件ハ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\cdots\cdots(3)$$

デアル、

〔證明〕 (1) ガ完全微分形ナルトキ (3) ガ成立スルコトハ明

アル、次ニ (3) ガ成立スルトキ (1) ガ完全微分形ナルコト

證明シヨウ。

今　　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{P}(x, y)$

ト置ケバ

$$u=\int \mathrm{P}(x, y)dx+f(y)$$

コヽニ $f(y)$ ハ y ノミノ函數デアル、依ツテ

$$\mathrm{Q}(x, y)=\frac{\partial}{\partial y}\int \mathrm{P}(x, y)dx-\frac{df(y)}{dy}\text{............} (4)$$

ナル如ク $f(x)$ ガ決定シ得ラレタトスルト u ハ (2) ヲ滿足

(1) ハ完全微分形ニシテ $u=c$ ハソノ解デアル、

然ルニ (4) ヨリ

$$\frac{df(y)}{dy}=\mathrm{Q}(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int \mathrm{P}(x, y)dx$$

トナリコノ式ノ右邊ハ x ニ關シ微分スルト (3) ニヨリ零

ナル故 y ノミノ函數デアル、依ツテ

$$f(y)=\int\left\{\mathrm{Q}(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int \mathrm{P}(x, y)dx\right\}dy$$

トナリ $f(y)$ ガ定マル、從ツテ u ノ存在ガ證明セラレタ、而

シテソノ求メ方モコノ證明ニヨリ明カデアル、

例、 $x(x^2+3y^2)dx+y(y^2+3x^2)dy=0$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3+3y^2)=6xy=\frac{\partial}{\partial x}(y^3+3x^2y)$$

デアルカラコノ方程式ハ完全微分形デアル、

故ニ　　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^3+3xy^2$

依ツテ　$u=\int(x^3+3xy^2)dx+f(y)$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+f(y)$$

之ヲ y ニ關シテ偏微分シ dy ノ係數ト比較スレバ

$$3x^2y+f'(y)=y^3+3x^2y$$

從ツテ　$f'(y)=y^3 \quad f(y)=\frac{1}{4}y^4$

故ニ一般解ハ

$$\frac{1}{2}x^4+3x^2y^2+\frac{1}{2}y^4=c$$

デアル、

場合ニ依ツテハ與ヘラレタ方程式ガソノ儘ニテハ完全微
形デハナイガ之ニ適當ナル因數ヲ乘ズレバ完全微分形トナ
コトガアル斯クノ如キ因數ヲ積分因數トイフ、

例、$x^3y^2+x^2y^3=c$ ヨリ c ヲ消去シテ微分方程式ヲ作ル
合ヲ考ヘルニ之ヲ x ニ關シテ微分スルト

$$(3x^2y^2+2xy^3)+(2x^3y+3x^2y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

トナリ之ハ明ニ完全微分形デアル、然シ之ヨリ xy ナル因
ヲ約シ去リタル

$$(2xy+2y^2)+(2x^2+3xy)\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ハ完全微分形デハナイ、

サレバ微分方程式 (5) ガ與ヘラレテヰルトキハ之ニ積分
數 xy ヲ乘ジ完全微分形ニ直ホシテ積分スルコトヲ得、

今一般ニ微分方程式

$$P+Q\frac{dy}{dx}=0$$

ノ積分因數ヲ M トスレバ, M ハ

$$\frac{\partial}{\partial y}(MP)=\frac{\partial}{\partial x}(MQ)$$

即チ
$$Q\frac{\partial M}{\partial x}-P\frac{\partial M}{\partial y}=M\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

カラ決定セラレル, 然シ之ハ M ニ關スル偏微分方程式デ
ヲ解クコトハ容易デハナイ、實際ニハ簡單ニ積分因數ノ發
出來ルトキニ限リ之ヲ利用スル、

問 題

次ノ微分方程式ヲトケ、

1. $\dfrac{2xy+1}{y}+\dfrac{y-x}{y^2}\dfrac{dy}{dx}=0$ 答 $x^2+\dfrac{x}{y}+\log y=c$

2. $\dfrac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx+\dfrac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}dy=0$ 答 $x^2y^2(y^2-x^2)=c$

3. $(6x-2y+1)dx+(2y-2x-3)dy=0$
答 $3x^2-2xy+y^2+x-3y=c$

4. $\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}dx+\left(x-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy=0$

(積分因數ハ $\dfrac{1}{x}$) 答 $\sin^{-1}\dfrac{y}{x}=y+c$

5. $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0$ 答 $x+\tan^{-1}\dfrac{x}{y}=c.$

(積分因數ハ $\dfrac{1}{x^2+y^2}$)

90. 一次形、

y 及 $\frac{dy}{dx}$ ニ關シテ一次ノ有理整式ナル微分方程式ヲ一次形トイフ、即チ

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}$$

コヽニ P 及 Q ハ x ノミノ函數デアル、

今コノ兩邊ニ $e^{\int \mathrm{P}dx}$ ヲカケルト

$$e^{\int \mathrm{P}dx}\left(\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y\right)=\frac{d}{dx}\left(ye^{\int \mathrm{P}xd}\right)$$

デアルカラ

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int \mathrm{P}dx}\right)=\mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}$$

故ニ
$$ye^{\int \mathrm{P}dx}=\int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx+c$$

依ッテ
$$y=e^{-\int \mathrm{P}dx}\int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx+ce^{-\int \mathrm{P}dx}$$

例、 $x\frac{dy}{dx}+(1+x)y=e^{x}$

x デ兩邊ヲワリ

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1+x}{x}y=\frac{e^{x}}{x}$$

サテ
$$e^{\int \mathrm{P}dx}=e^{\log x+x}=xe^{x}$$

デアルカラ

$$yxe^{x}=\int e^{2x}dx+c$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{2}\frac{e^{e}}{x}+c\frac{e^{-}}{x}$$

問　題

次ノ微分方程式ヲトケ、

1. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$　　答　$\dfrac{y}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}x^2+x+c$

2. $x^2\dfrac{dy}{dx}+(1-2x)y=x^2$　　答　$e^{-\frac{1}{x}}\left(\dfrac{y}{x^2}-1\right)=c$

3. $y\dfrac{dy}{dx}+xy^2=x$　（$y^2=v$　トオケ）　　答　$e^{x^2}(y^2-1)=c$

4. $\sin y\dfrac{dy}{dx}+\sin x\cos y=\sin x$　（$\cos y=v$　トオケ）

答　$e^{\cos x}(\cos y-1)=c$

5. $(1-x^3)\dfrac{dy}{dx}-2(1+x)y=y^{\frac{5}{2}}$　（$y^{-\frac{3}{2}}=v$　トオケ）

答　$y^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{1+x+x^2}+\dfrac{c(1-x)^2}{1+x+x^2}$

6. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{a}{3}y=\dfrac{x+1}{y^2}$　　答　$y^3=-\dfrac{3}{a^2}(ax+a+1)+ce^{ax}$

7. $\dfrac{dy}{dx}+y=xy^3$　　答　$y^{-2}=x+\dfrac{1}{2}+ce^{2x}$

第二十三章

一階高次微分方程式

91. 微分方程式ガ $\dfrac{dy}{dx}$ ニ關シテ一次ノ因數ニ分解シ得ル場合、

先ヅ一階二次方程式ガ $\dfrac{dy}{dx}$ ニ關シ一次ノ因數ニ分解サレル場合ヲ考ヘ次ノ形ヲトルモノトスル、即チ

$$\left\{\frac{dy}{dx}-f_1(x,y)\right\}\left\{\frac{dy}{dx}-f_2(x,y)\right\}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

今

$$\frac{dy}{dx}-f_1(x,y)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{dy}{dx}-f_2(x,y)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

トオクトキハ (2) 又ハ (3) ノ何レカヲ滿足スル x, y ノ關係ハ (1) ヲ滿足シ, (2) 又ハ (3) ノ何レヲモ滿足シナイ x, y ノ關係ハ (1) ヲ滿足シナイ、故ニ (2) 及 (3) ノ解ヲ夫々

$$F_1(x,y,c_1)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$F_2(x,y,c_2)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

トスレバ (4) 及 (5) ハ何レモ (1) ノ解デアルカラ之ヲ

$$F_1(x,y,c_1)F_2(x,y,c_2)=0$$

ト書ク、然ルニ一階微分方程式ノ解ハ二ツ以上ノ任意常數ヲ含ミ得ナイ故

$$F_1(x,y,c)F_2(x,y,c)=0$$

ガ (1) ノ一般解デアル、

同樣ニ一階 n 次微分方程式ガ

$$\left\{\frac{dy}{dx}-f_1(x,y)\right\}\left\{\frac{dy}{dx}-f_2(x,y)\right\}\cdots\cdots\left\{\frac{dy}{dx}-f_n(x,y)\right\}=0$$

ナル形ヲトリ得ル場合ハ各因數ヲ 0 ニ等シト置キタル微分方程式ノ解ヲ夫々

$$F_1(x,y,c_1)=0,\ F_2(x,y,c_2)=0,\ \cdots\cdots\ F_n(x,y,c_n)=0$$

トスルトキハ原方程式ノ一般解ハ

$$F_1(x,y,c)F_2(x,y,c)\cdots\cdots F_n(x,y,c)=0$$

デアル、

問　　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ、

1. $a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y,\quad a>0$　　答　$(x-c)^2=4ay$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x+y)\frac{dy}{dx}+xy=0$　　答　$(2y+x^2-c)(y-ce^{-x})=0$

3. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}-x=0$　　答　$c^2x^2-2cy-1=0$

4. $y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$　　答　$y=\sin(x+c)$

92. 微分方程式ガ y 又ハ x ニ關シテ一次ナル場合、

先ヅ微分方程式ガ y ニ關シテ一次ナル場合ヲ考ヘルニ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ p ナル文字デ表ハセバ次ノ形ヲトル、

$$y=f(x,p) \qquad p=\frac{dy}{dx} \cdots\cdots\cdots (1)$$

今 x ニ關シテ微分スレバ

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) ハ x ト p トノ一階一次方程式デアル，ソノ解ヲ

$$F(x,y,c)=0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

トスルトキハ (1) 及 (3) カラ p ヲ消去シテ (1) ノ一般解

$$\phi(x,y,c)=0$$

ヲ得、或ハ p ヲ媒介變數ト考フレバ (1) 及 (3) ヲ以ツテ直チニ (1) ノ一般解トシテモ宜シイ、

特別ナル場合トシテ f ガ x ヲ含マナイトキハ

$$y=f(p)$$

$$p=f'(p)\frac{dp}{dx}$$

デアルカラ

$$y=f(p) \qquad x=\int\frac{f'(p)}{p}dp+c$$

ハソノ一般解デアル、

$x=f(y,p)$ $x=f(p)$ ナル場合モ全ク同様ニ論ゼラレル、

例、 $y=x\phi(p)+f(p)$

x ニ關シ微分スレバ

$$p=\phi(p)+\left\{x\phi'(p)+f'(p)\right\}\frac{dp}{dx}$$

依ツテ次ノ一般解ヲ得、

$$y=x\phi(p)+f(p)$$

$$x=e^{-\int\frac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}dp}\left\{\int e^{\int\frac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}dp}\frac{f'(p)}{p-\phi(p)}dp+c\right\}$$

問　　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ但シ $p=\frac{dy}{dx}$

1. $2px-y+\log p=0$　　答 $\begin{cases} x=\dfrac{c-p}{p^2} \\ y=\dfrac{2(c-p)}{p}+\log p \end{cases}$

2. $4xp^2+2xp-y=0$　　答 $(y-c)^2=cx$

3. $xp^2-2yp-x=0$　　答 $c^2x^2-2cy-1=0$

4. $x+py(2p^2+3)=0$　　答 $x^2=(c-y^{\frac{2}{3}})(2c+y^{\frac{2}{3}})^2$

93. くれーろーノ方程式、

前節ノ例ニ於テ $\phi(p)=p$ ナル場合ニ之ヲ特ニ**くれーろーノ方程式**トイフ、即チ

$$y=xp+f(p),\quad p=\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

x ニ關シテ微分スレバ

$$\left\{x+f'(p)\right\}\frac{dp}{dx}=0$$

即チ　$\frac{dp}{dx}=0$ 又ハ $x+f'(p)=0$

(i) $\dfrac{dp}{dx}=0$ 從テ $p=c$

之ヲ (1) ニ代入シテ次ノ一般解ヲ得、

$$y=cx+f(c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(ii) $x+f'(p)=0$

p ヲ媒介變數ト考ヘルト

$$x+f'(p)=0,\ y=xp+f(p)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ハ (1) ノ解デアル、何トナレバ p ヲ x ノ函數トシテ (3) ノ第二式ヲ微分スルト

$$\frac{dy}{dx}=p+\left\{x+f'(p)\right\}\frac{dp}{dx}$$

トナリ (3) ノ第一式ヲ用ユレバ與ヘラレタル微分方程式

$$y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ヲ得ルカラ,

然ルニ $x+f'(p)=0$ ナル故 p ハ明カニ x ノ函數デアツテ $p=c$ ノ特殊ナル場合デハナイ故ニ (3) ナル解ハ (1) ナル一般解ノ中ニ含マレナイ、即チ (3) ハ特異解デアル、

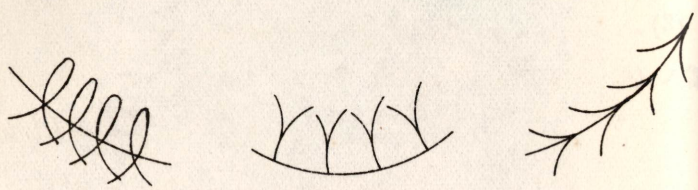
(3) ニ於テ p ハ媒介變數デアルカラ p ヲ c ト書イテモヨイ、然ルトキハ (2) ナル一般解ハ一ツノ曲線群ヲ表ハスガ (3) ハソノ包絡線デアルコトハ明カデアル、

一般ニ微分方程式 $f(x,y,p)=0$ ハ x,y,p ノ關係ヲ示スモノデアルカラソノ一般解 $F(x,y,p)=0$ ナル曲線群ガ包絡線

$$F(x,y,c)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial c}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ヲ有スル場合ニハ之ハ原微分方程式ノ特異解デアル、

然シ (4) ハ必ズシモ $F(x,y,c)=0$ ノ包絡線トハ限ラナイ, (4) ハ重複點ノ軌跡ヲモ表ハシ得ルノデアツテ, 曲線ト包絡線トノ共通點ニ於テハ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ値ハ相等シイガ曲線ト重複點トノ共通點ニ於テハ必ズシモ然ラズ, 從ツテ (4) ガ重複點ノ軌跡ヲ表ハス場合ニハ之ハ必ズシモ原微分方程式ノ解デハナイ、



故ニ一般解 $F(x,y,c)=0$ ガ重複點ヲ有シナイ場合ニハ

$$F(x,y,c)=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c}=0$$

ハ特異解デアルガ, $F(x,y,c)=0$ ガ重複點ヲ有スル場合ニハ之ヲ微分シテ原方程式ヲ滿足スルヤ否ヤヲ檢セネバナラナイ、

例、 $y=ap^3 \quad a>0$

之ヲ微分スレバ

$$p=3ap^2\frac{dp}{dx}$$

即チ
$$1=3ap\frac{dp}{dx} \quad 又ハ \quad p=0$$

(i) $1=3ap\dfrac{dp}{dx}$

$y=ap^3,\ x=3a\dfrac{p^2}{2}+c$ ヨリ p ヲ消去シテ次ノ一般解ヲ得、

$$8(x-c)^3=27ay^2$$

(ii) $p=0$

$y=ap^3,\ p=0$ ヨリ $y=0$ ナル特異解ヲ得、

此ノ場合 $y=0$ ハ尖點ノ軌跡ニシテ同時ニ包絡線デアル、

問　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ、但シ $p=\frac{dy}{dx}$

1. $y=xp+\sqrt{1+p^2}$ 　　答 $y=cx+\sqrt{1+c^2}$
   $x^2+y^2=1$

2. $4e^{2y}p^2+2xp-1=0$ 〔$e^{2y}=v$ トオケ〕
   答 $e^{2y}=cx+c^2$

3. $y=2px+y^2p^3$ 　　答 $y^2=cx+\frac{1}{8}c^3$

4. $(x^2-1)p^2-2xyp=x^2$

5. $3xy+2p^2=2x^2p$

第二十四章

線狀二階微分方程式

94. 線狀二階微分方程式、

X_0, X_1, X_2, X ヲ x ノ函數トスルトキ

$$X_0\frac{d^2y}{dx^2}+X_1\frac{dy}{dx}+X_2y=X \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ**線狀二階微分方程式**トイヒ應用諸學科ニ於テシバシバ表ハレル形デアル、

今 $\frac{dy}{dx}=\mathrm{D}y,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{D}^2y$ ト書クト (1) ハ記號的ニ次ノ如ク書キ表ハスコトヲ得、

$$(X_0\mathrm{D}^2+X_1\mathrm{D}+X_2)y=X$$

或ハ

$$\mathrm{F}(\mathrm{D})y=X$$

コヽニ $\mathrm{F}(\mathrm{D})$ 又ハ $X_0\mathrm{D}^2+X_1\mathrm{D}+X_2$ ハ $X_0\frac{d^2}{dx^2}+X_1\mathrm{D}+X_2$ ヲ表ハシ, $\mathrm{F}(\mathrm{D})y$ 又ハ $(X_0\mathrm{D}^2+X_1\mathrm{D}+X_2)y$ ハ記號的ニ

$$X_0\mathrm{D}^2y+X_1\mathrm{D}y+X_2y \text{ 即チ } X_0\frac{d^2y}{dx^2}+X_1\frac{dy}{dx}+X_2y$$

ヲ表ハスモノトスル、

サテ $X=0$ ナル場合ニ (1) ヲ**同次線狀二階微分方程式**トイヒ, 之ニ對シ $X\neq0$ ナル場合ニ (1) ヲ**完全線狀二階微分方程式**トイフ、

先ヅ $X=0$ ナル場合即チ

$$F(D)y=0 \quad\dotfill\quad (2)$$

ヲ考ヘルコトヽスル、

今 $y=y_1$ ガ (2) ヲ滿足スレバ, c_1 ヲ任意ノ常數トスルトキ $y=c_1y_1$ モ亦 (2) ヲ滿足スル、何トナレバ

$$D(c_1y_1)=c_1Dy_1,\ D^2(c_1y_1)=c_1D^2y_1$$

デアルカラ

$$F(D)(c_1y_1)=c_1F(D)y_1$$

然ルニ假定ニヨリ $F(D)y_1=0$ デアルカラ

$$F(D)(c_1y_1)=0$$

デアル、

次ニ又 $y=y_2$ ヲ (2) ノ解トスレバ上ト同樣ニ c_2y_2 モ亦 (2) ノ解デアルガ, $c_1y_1+c_2y_2$ ナル函數モ亦 (2) ヲ滿足スル、何トナレバ

$$F(D)(c_1y_1+c_2y_2)=F(D)(c_1y_1)+F(D)(c_2y_2)$$
$$=c_1F(D)y_1+c_2F(D)y_2=0$$

デアルカラ、

然ルニ二階微分方程式ノ解ニシテソレガ互ニ獨立ナル任意常數ヲ含メバ一般解デアルカラ次ノ定理ガ得ラレル、

定理 I. 同次線狀二階微分方程式ノ互ニ一次的ニ獨立ナル二ツノ特殊解ヲ y_1 及 y_2 トシ c_1, c_2 ヲ任意常數トスレバ $c_1y_1+c_2y_2$ ハソノ一般解デアル、

用語上ノ便宜ノタメニ (1) ニ於テ右邊ヲ 0 トオキタルモノノ積分即チ (2) ノ一般解ヲ (1) ノ餘函數トイフコトトスル、

今 (1) ノ餘函數ヲ $Y=c_1y_1+c_2y_2$ トシ (1) ノアル任意ノ特殊解ヲ U トスレバ $Y+U$ ハ (1) ノ一般デアル、何トナレバ $Y+D$ ハ

明カニ二ツノ互ニ獨立ナル任意常數ヲ含ミ且 (1) ヲ滿足スル即チ

$$f(C)(Y+D)=f(D)Y+f(D)U=0+x=X$$

デアル故、

依ッテ次ノ定理ヲ得、

定理 II. 完全線狀二階微分方程式ノ一般解ハソノ餘函數ト任意ノ特殊解ノ和デアル、

即チ **一般解＝餘函數＋任意ノ特殊解、**

95. 係數ガ常數ナル線狀二階微分方程式、

k_0, k_1, k_2 ヲ常數トスルトキ

$$k_0\frac{d^2y}{dx^2}+k_1\frac{dy}{dx}+k_2y=X \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ考ヘルコトヽスル,記號的ニ書ケバ

$$(k_0D^2+k_1D+k_2)y=X \quad 又ハ \quad f(D)y=X$$

先ヅ $X=0$ ナル場合ヲ考ヘル,即チ

$$f(D)y=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

今 $y=e^{mx}$ 置ケバ $Dy=me^{mx}$, $D^2y=m^2e^{mx}$ トナルカラ

$$f(D)e^{mx}=e^{mx}f(m)$$

故ニ e^{mx} ガ (2) ノ解トナルタメニハ m ガ

$$f(m)=0$$

即チ $$k_0m^2+k_1m+k_0=0$$

ノ根デアレバ宜シイ、

依ッテ (3) ガ互ニ相異ル實根 m_1, m_2 ヲ有スルトキハ e^{m_1x}, e^{m_2x} ハ互ニ一次的ニ獨立ナル (2) ノ解デアッテ, $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$ ハ (2) ノ一般解,從ッテ (1) ノ餘函數デアル、

m ノ値ヲ決定スベキ方程式 (3) ハ (1) 從ツテ (2) カラ容易ニ得ラレル, コレヲ (1) 又ハ (2) ノ**補助方程式**トイフ、

例 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

補助方程式ハ $m^2-3m+2=0$ ニシテ, ソノ根ハ 1 及 2 デアルカラ, ソノ一般解ハ

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

デアル、

例 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+25y=0$

$$m^2-6m+25=0$$

故ニ $$m=3\pm4i$$

依ツテ一般解ハ

$$y=c_1e^{(3+4i)x}+c_2e^{(3-4i)x} \text{ 或ハ } e^{3x}(c_1e^{4ix}+e_2e^{-4ix})$$

但シコノ場合ハ一般解ハ複素數デ表ハサレル, コノトキノ處理ニツイテハ後述スル、

96. 補助方程式ガ等根ヲ有スル場合、

補助方程式ガ等根ヲ有スルトキハ前節ノ方法デハ互ニ一次的ニ獨立ナル二ツノ解ハ得ラレナイ、コノ場合ニハ今一ツノ解ヲ

$$y=e^{mx}\varphi(x)$$

トオク, コヽニ $\varphi(x)$ ハ x ノ未確定ノ函數デアル、

然ルトキハ

$$\mathrm{D}y=e^{mx}(m\varphi+\mathrm{D}\varphi)$$

$$\mathrm{D}^2y=e^{mx}(m^2\varphi+2m\mathrm{D}\varphi+\mathrm{D}^2\varphi)$$

從ツテ $$f(\mathrm{D})y=e^{mx}[f(m)\cdot\varphi+f'(m)\mathrm{D}\varphi+k_0\mathrm{D}^2\varphi]$$

今 $f(m)=0$ ノ等根ヲ m_1 トスレバ

$$f(m_1)=0,\quad f'(m_1)=0$$

デアルカラ更ニ $\mathrm{D}^2\varphi=0$ ナラバ $y=e^{m_1x}\varphi(x)$ ハ

$$f(\mathrm{D})y=0$$

ヲ満足スル、

サテ $\mathrm{D}^2\varphi=0$ ナル $\varphi(x)$ ノ最モ簡單ナル形ハ x デアルカラ

$$y=xe^{m_1x}$$

ハ $f(\mathrm{D})y=0$ ノ解デアル、依ッテ補助方程式ノ等根ヲ m_1 トスレバ求ムル餘函數ハ

$$c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}\ \text{又ハ}\ e^{m_1x}(c_1+c_2x)$$

デアル、

97. 補助方程式ガ虛根ヲ有スル場合、

k_0, k_1, k_2 ハ實數デアルカラ補助方程式ノ一根ヲ $\alpha+i\beta$ トスレバ他ノ一根ハ $\alpha-i\beta$ デアル、故ニ餘函數ハ

$$y=c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x})$$

然ルニ

$$e^{i\beta x}=\cos x+i\sin\beta x,\ e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$$

デアルカラ

$$y=e^{\alpha x}\{(c_1+c_2)\cos\beta x+i(c_1-c_2)\sin\beta x\}$$

ト書キカヘラレ $c_1=\dfrac{\mathrm{A}-i\mathrm{B}}{2},\quad c_2=\dfrac{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}{2}$ トオケバ

$$y=e^{\alpha x}(\mathrm{A}\cos\beta x+\mathrm{B}\sin\beta x)$$

トナル、コヽニ A, B ハ任意常數デアル、

必要ニ依ッテハ上ノ形ハ又

$$ae^{\alpha x}\sin(\beta x+b),\ ae^{\alpha x}\cos(\beta x+b)$$

ノ如ク變形出來ル，コヽニ a, b ハ任意常數デアル、

例、前節ノ例 2 ノ場合ニハ $\alpha=3$, $\beta=4$ デアルカラ

$$y=e^{3x}(\mathrm{A}\cos 4x+\mathrm{B}\sin 4x)$$

又ハ

$$=ae^{3x}\cos(4x+b)$$

問　　題

次ノ微分方程式ヲトケ、

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0$　　答 $y=c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$　　答 $y=\mathrm{A}\cos ax+\mathrm{B}\sin ax$

3. $9\dfrac{d^2y}{dx^2}-12\dfrac{dy}{dx}+4y=0$　　答 $y=e^{\frac{2}{3}x}(c_1+c_2x)$

4. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\lambda y$　〔$x=e^\theta$ トオケ〕

答 $y=\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}}+\mathrm{B}x^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}}$

5. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0$　〔$x=e^\theta$ トオケ〕

答 $xy=\mathrm{A}+\mathrm{B}\log x$

98. 特殊解ヲ求ムル法、

補助方程式ノ二根ヲ m_1, m_2 トスレバ

$$f(\mathrm{D})=k_0(\mathrm{D}-m_1)(\mathrm{D}-m_2)$$

デアルカラ記號的ニ

$$f(\mathrm{D})y=k_0(\mathrm{D}-m_1)(\mathrm{D}-m_2)y$$

ト書クコトヲ得，但シ $(\mathrm{D}-m_2)y$ ノ意味ハ $\mathrm{D}y-m_2y$ デアル從ッ

テ $(\mathrm{D}-m_1)(\mathrm{D}-m_2)y$ ハ $(\mathrm{D}-m_1)(\mathrm{D}y-m_2y)$, 従ツテ $\mathrm{D}(\mathrm{D}y-m_2y)-m_1(\mathrm{D}y-m_2y)$ ヲ意味スル、

サテ簡單ノタメニ原微分方程式ニ於テ $k_0=1$ ト假定シテ一般性ヲ失ハナイ、即チ原微分方程式ヲ

$$(\mathrm{D}-m_1)(\mathrm{D}-m_2)y=\mathrm{X}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

トスル、

今 $(\mathrm{D}-m_2)y=u$ ナル新シキ函數ヲ考ヘルト

$$(\mathrm{D}-m_1)u-\mathrm{X}=0$$

即チ
$$\frac{du}{dx}-m_1u=\mathrm{X}$$

トナリ, コレハ u ニ關シ線狀一階一次方程式デアル、

故ニ
$$e^{-m_1x}u=\int e^{-m_1x}\mathrm{X}dx+c$$

即チ
$$u=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}\mathrm{X}dx+ce^{m_1x}$$

依ツテ

$$(\mathrm{D}-m_2)y=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}\mathrm{X}dx+ce^{m_1x}$$

コノ方程式モ亦線狀一階一次微分方程式デアルカラ

$$e^{-m_2x}y=\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}\mathrm{X}\,dx\right]dx+\frac{c}{m_1-m_2}e^{(m_1-m_2)x}+c'$$

故ニ
$$y=e^{m_2x}\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}\mathrm{X}\,dx\right]dx+\frac{c}{m_1-m_2}e^{m_1x}+c'e^{m_2x}$$

$c_1=\dfrac{c}{m_1-m_2}$, $c_2=c'$ トオキ (1) ノ解

$$y=e^{m_2x}\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}\mathrm{X}\,dx\right]dx+c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$$

ヲ得, コヽニ c_1, c_2 ハ任意常數デアル、

上式ニ於テ最後ノ二項ヨリナル式ハ既ニ述ベタ餘函數ニ他ナラナイ、尙補助方程式ガ等根ヲ有スル場合ニモ全ク同樣ニ處理セラレコノ場合ニモ亦餘函數ガ現ハレル、何レノ場合ニ於テモ第一項ハ (1) ノ特殊解デアル、

例、 $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=e^{-x}$

補助方程式ハ $m^2-m-2=0$ ナル故 $m=-1,2$

依ツテ餘函數ハ $c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$

次ニ特殊解ハ

$$e^{2x}\int e^{(-1-2)x}\left[\int e\,,\ e^{-x}dx\right]dx$$

$$=e^{2x}\int e^{-3x}xdx$$

$$=-\frac{1}{3}xe^{-x}-\frac{1}{9}e^{-x}$$

e^{-x} ハ餘函數ニ含マレテ居ルカラ特殊解トシテ $-\frac{1}{3}xe^{-x}$ ヲ採用スレバヨイ、依ツテ一般解ハ

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{3}xe^{-x}$$

問　題

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=\sin x$　　答 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{10}(\cos x-3\sin x)$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=\frac{e^x}{(1-x)^2}$　　答 $y=e^x[c_1+c_2x-\log(1-x)]$

99. 特殊解ヲ求ムル別法、

$$(D-m_1)(D-m_2)\,y=X$$

ヲ記號的ニ

$$y=\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)}X \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ト書キ直ホシ $\dfrac{1}{(D-m_1)(D-m_2)}$ ヲ $(D-m_1)(D-m_2)$ ノ逆運算ト考ヘル、即チ $\dfrac{1}{(D-m_1)(D-m_2)}X$ ニ $(D-m_1)(D-m_2)$ ヲ働カストX ヲ得ルモノトスル、

代數的ニ

$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)}=\frac{1}{(m_1-m_2)}\left(\frac{1}{D-m_1}-\frac{1}{D-m_2}\right)$$

デアルカラ, 今 $m_1 \neq m_2$ ト假定スルト (1) ハ

$$y=\frac{1}{m_1-m_2}\left(\frac{1}{D-m_1}X-\frac{1}{D-m_2}X\right)$$

トナリ $u=\dfrac{1}{D-m}X$ トオクト

$$(D-m)u=X$$

トナルカラ之ヲトキ

$$ue^{-mx}=\int e^{-mx}X\,dx$$

故ニ

$$u=e^{mx}\int e^{-mx}X\,dx$$

トナルカラ

$$y=\frac{1}{m_1-m_2}\left[e^{m_1x}\int e^{-m_1x}X\,dx-e^{m_2x}\int e^{-m_2x}X\,dx\right]$$

上述ノ方法ハ補助方程式ノ根ガ虚數アルトキニ優レテキル、

今補助方程式ノ二根ヲ $\alpha+i\beta,\ \alpha-i\beta$ トスルト

$$y=\frac{1}{2i\beta}\left[\frac{1}{D-(\alpha+i\beta)}X-\frac{1}{D-(\alpha-i\beta)}X\right]$$

トナリ，

$$\frac{1}{D-(\alpha+i\beta)}X=e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha+i\beta)x}Xdx$$

$$=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\int e^{-\alpha x}X(\cos\beta x-\sin\beta x)dx$$

同様ニ

$$\frac{1}{D-(\alpha-i\beta)}X=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)\int e^{-\alpha x}X(\cos\beta x+i\sin\beta x)dx$$

從ツテ

$$y=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\left[\sin\beta x\int e^{-\alpha x}X\cos\beta x dx-\cos\beta x\int e^{-\alpha x}X\sin\beta x dx\right]$$

問　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ、

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x$　　答 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\sec x$　答 $y=c_1\sin(x+c_2)+x\sin x+\cos x\log\cos x$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=k$

答

$a^2>4b$ ナルトキハ

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\frac{k}{b}$$

コヽニ m_1, m_2 ハ $m^2+am+b=0$ ノ根、

$a^2=4b$ ナルトキハ

$$y=e^{-\frac{a}{2}x}(c_1+c_2x)+\frac{k}{b}$$

$a^2<4b$ ナルトキハ

$$y=c_1e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+c_2\right)+\frac{k}{b}$$