第八章

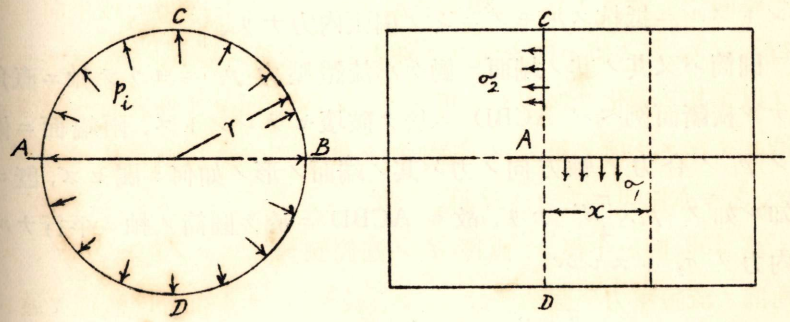
薄キ圓筒及球殼ノ强サ

八四、内部ヨリ流體壓力ヲ受クル圓筒並ニ球殼、

罐ノ如キモノニ於テハ，流體ノ重量ヲ無視スレバ内部壓力ハ到ル處同一ノ强サヲ有シ，罐胴ニ於ケル二ツノ主内力ハ接平面ニ平行ニシテ，其ノ値ハ内表面ヨリ外表面ヘ次第ニ變ズルモ，厚サ薄キヲ以テ其ノ變化ヲ無視シテ可ナリ、又内表面ヨリ外表面ヘ半徑ニ沿ヒテ存スル所ノ第三ノ主内力ハ他ノ二ツニ比シテ甚ダ小ニシテ，之モ亦無視スルコトヲ得、

第 152 圖ハ半徑 r，直徑 d ノ圓筒胴ニシテソノ厚サヲ t トス、内部ノ流體壓力ノ强サヲ p_i トス、長サ x ナル部分ヲ直徑ヲ通ズル平面板 AB ニテ二ツニ分チタリト想像シ，其ノ一部 ABC ノ釣合ヲ考フルニ AB 面ニ働ク力ハ p_ixd ナリ、此ノ力ト ACB 面ニ働ク力トハ釣合ハザル可ラザルヲ以テ ACB ニ働ク力モ p_ixd，即チ p_i ト AB ノ面積トノ乘積ナリ、斯クノ如キ關係ハ ACB ノ形ガ圓筒ナラザル場合ニモ成立ス、例ヘバ ACB ガ球面ナル場合ニモ球面 ACB ニ働ク p_i ノ合力ハ $p_i\times\frac{\pi}{4}d^2$ ナリ、

偖圓筒胴 ACBDA ニ於テ其ノ半面 ACB ニ働ク p_i ノ合力ハ p_ixd ナリ、此ノ力ニ對シ胴部ガ A ト B トニ於テ抵抗スル所ノ



第152図

内力ヲ σ_1 トスレバ A, B ニ於ケル全内力ハ各 $\sigma_1 xt$ ナリ、故ニ胴部 ACB ノ釣合ニ於テ

$$p_i xd = 2\sigma_1 xt$$

$$\therefore \quad p_i d = 2\sigma_1 t$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma_1 = \frac{p_i d}{2t} = \frac{p_i r}{t}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot1)$$

又

$$t = \frac{p_i d}{2\sigma_1} = \frac{p_i r}{\sigma_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot2)$$

σ_1 ハ圓 ACBD ニ切線ノ方向, 即チ周圍方向ノ内力ニシテ之ヲ箍張内力 (Hoop stress) ト云フ、此ノ内力ハ圓筒ガ直徑ヲ含ム斷面ニ於テ破壞セントスルニ抵抗スルモノニシテ引張内力ナリ、

圓筒ハ又其ノ其ノ端面ニ働ケル流體壓力 p_i ニヨリテ軸ニ直角ナル横斷面例ヘバ ACBD ニ於テ破壞セラレントス、兩端面ニ働ク p_i ノ合力ノ軸方向ノ力ハ其ノ端面ノ形ノ如何ニ關セズ, 既ニ知ル如ク $p_i \times \frac{\pi}{4} d^2$ ナリ、故ニ ACBD ニ於テ圓筒ノ軸ニ平行ナル内力ヲ σ_2 トスレバ

$$\frac{\pi}{4} p_i d^2 = \sigma_2 \times \pi dt$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma_2 = \frac{p_i d}{4t} = \frac{p_i r}{2t}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot3)$$

σ_2 ハ σ_1 ノ $\frac{1}{2}$ ナルコトヲ知ル、σ_2 モ亦引張内力ナリ、

σ_1, σ_2 ハ主内力ナリ、他ノ主内力ハ半徑ニ沿フ所ノモノニシテ玆ニハ零ト見做セリ、最大主内力説ニヨリテ圓筒ノ强サヲ決定スルモノトスレバ (8・1) ニヨリ

$$\sigma_1 = \sigma_s$$

但シ σ_s ハ材料ノ降伏點ナリ、是ニヨリテ

$$p_i=\frac{t}{r}\sigma_s \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot4)$$

歪ミ「エネルギー」說ニヨレバ

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\frac{2}{m}\sigma_1\sigma_2=\sigma_s^2$$

$$\therefore \quad \frac{p_i^2r^2}{t^2}\left(1+\frac{1}{4}-\frac{2}{m}\times1\times\frac{1}{2}\right)=\sigma_s^2$$

$$\therefore \quad p_i=\frac{t}{r}\sigma_s\sqrt{\frac{4m}{5m-4}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot5)$$

$m=\frac{10}{3}$ トスレバ (8・5) ハ

$$\boxed{p_i=1\cdot025\frac{t\sigma_s}{r}}$$

トナルヲ以テ (8・4) ニヨリ與ヘラルルモノヨリ 2.5 % 大ナリ、

球殼ノ場合ニ於テハ

$$\frac{\pi}{4}p_id^2=\pi\sigma_1dt$$

$$\therefore \quad \sigma_1=\frac{p_id}{4t}=\frac{p_ir}{2t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot6)$$

$$p_i=\frac{2\sigma_1t}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot7)$$

此ノ場合ニハ $\sigma_1=\sigma_2$ ナリ、降伏點ヲ σ_s トスレバ，最大主內力說ニヨレバ

$$\sigma_1=\sigma_s$$

$$\therefore \quad \boxed{p_i=\frac{2t}{r}\sigma_s} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8\cdot8)$$

歪ミ「エネルギー」說ニヨレバ

内部ヨリ流体圧力ヲ受クル円筒並球殻ノ強サ.

(1) 最大主内力説.

$\sigma_1=\sigma_s$. $\quad p_i=\frac{t}{r}\sigma_s$.

(2) 最大「エネルギー」説 $\quad$ [(1)>(2) 2.5%]

$p_i=\frac{t}{r}\sigma_s\sqrt{\frac{4m}{5m-4}}$ $\quad p_i=1.025\frac{t\sigma_s}{r}$

σ_1：極張内力
周囲方向ノ内力.
σ_2：軸方向ノ内力
$\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_1$.
t：厚サ.
r：半径
σ_s：降伏点.

球殻.

$\sigma_1=\sigma_2$

(1) 最大主内力説.

$\sigma_1=\sigma_s$ $\quad p_i=\frac{2t}{r}\sigma_s$.

(2) 歪「エネルギー」説.

$p_i=\frac{2t}{r}\sigma_s\sqrt{\frac{m}{2(m-1)}}$ $\quad p_i=0.85\left(\frac{2t}{r}\sigma_s\right)$.

[(2)<(1) 15%.]

$$\frac{p_i^2 r^2}{4t^2}\left(1+1-\frac{2}{m}\right)=\sigma_s^2$$

$$\therefore \quad p_i=\frac{2t}{r}\sigma_s\sqrt{\frac{m}{2(m-1)}} \quad \text{..............} (8 \cdot 9)$$

$m=\frac{10}{3}$ トスレバ (8•9) ヨリ

$$\boxed{p_i=0 \cdot 85\left(\frac{2t}{r}\sigma_s\right)}$$

故ニ (8•9) ニヨリ與ヘラルルモノハ (8•8) ニヨルモノヨリ約 15% 小ナリ、

(8•1), (8•2) 等ノ式ハ圓罐胴ノ强サヲ算定スルニ適用スルコトヲ得、然レドモ胴板ハ互ニ鋲接セラレ, 其ノ鋲孔ノ最多數ノ縱斷面ハ胴板ノ最弱ノ部ナルベク, 若シ σ_s ノ値ヲ實驗成績ニヨリ推定シ一般ノ場合ヨリモ更ニ低キ値ヲ用フルトキハ前諸式ハ指定ノ罐ニ對スル使用蒸氣壓力ヲ算定シ, 若クハ指定ノ蒸氣壓力ニ對スル胴板ノ厚サヲ計算スル式トシテ用フルコトヲ得ベシ、

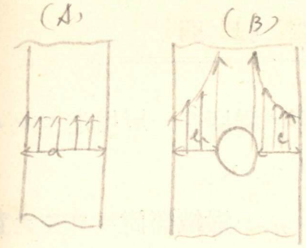
八五、流體外壓ヲ受クル薄キ圓筒ノ强サ、

圓筒ノ直截面ガ眞ノ圓ニシテ一樣ノ厚サヲ有シ, 其ノ材料ガ等質ナル場合ニハ内壓ヲ受クル薄キ圓筒ノ場合ト同樣ニ

$2\sigma \cdot lt = p_i \times d$

$$2\sigma_t t=p_i d$$

ナル關係ニヨリ其ノ縮張内力ヲ決定スルコトヲ得ベシト雖, 實際ノ圓筒ハ此クノ如キ完全ナルモノニアラズ、内壓ノ場合ニハ圓罐胴板ノ如キ縱令其ノ直截面ガ眞ノ圓ニアラズトモ, 流體内壓ハ之ヲシテ眞ノ圓形ナラシムル如ク作用スルヲ以テ之ヲ直截面ガ眞ノ圓形ナル場合ノ式ヲ適用スルモ差支ナシ、之ニ反シ煙管ノ如キモ



故ニ鋲ガ入ッテ居ルノ鋲孔ハソレヲソノマヽ板トシテ強度ヲ計算スルハ誤リナリ。

$b+c=a$

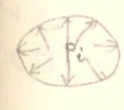
強度ハ A ガ大。

許シ内力ハ温度ニヨリ異ル。

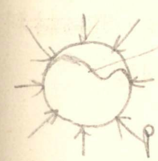
「クリープ」試験

高温,高圧ハ良好ナルモ高温ニテハ材料ガモタナイ。

現今ニテハ 400～500 480° 位迄ガ外国デハ 30° 位迄,



P_i (内圧) ヲカケルハ円形トナル。故ニ円形ノ計算デ差支ヘナシ。



圧潰 (表柱ノ場合ノ Buckling ト同ジ現象ナリ)

ノニアリテハ外部ノ蒸氣壓力ハ歪形ノ程度ヲ一層增進セシムル如ク作用シテ終ニハ壓潰(Collapsing)ヲ起スニ至ルベシ、

壓潰壓力(Collapsing pressure)ニ關シ「フエアベイルン」(William Fairbairn)ハ鍛鐵圓筒ニツキテ實驗ヲ行ヒ次ノ式ヲ與ヘタリ、

$$壓潰壓力 = p = 9{,}675{,}600\frac{t^{2\cdot19}}{ld}$$

但シ p ハ lbs/in², t, l, d ハ in, 而シテ d ハ外徑ナリ、是ハ比較的短キ管ニツキテ爲サレシ實驗ニヨルモノナリ、「フエアベイルン」ハ簡單ナル式トシテハ t ノ指數 2·19 ノ代リニ 2 トシタリ、短キ管ニツキテハ兩端支持點ノ影響ヲ受クルコト多カルベキモ，管ガ長クナレバ兩端支持點ニ近キ部分ヲ除キテハ其ノ影響ハ無キモノト見做シ得ベシ、「フエアベイルン」ノ式ハ 1858 年ニ發表セラレタルモノナルガ，其ノ後 1906 年「イリノイ」大學ノ「カルマン」(A. P. Carman)ノ發表ニヨレバ，其ノ實驗ノ結果「フエアベイルン」ノ式ハ管ノ長サガ直徑ノ 4 倍乃至 6 倍ノモノニハ適合スルコトガ知ラレ，更ニ長キ管ニツキテハ壓潰壓力ハ管ノ長サニ無關係ナルコトガ知ラレタリ、而シテ長キ管ニ對スル實驗トシテ次ノ式ガ得ラレタリ、

(i) $\frac{t}{d} > 0{\cdot}025$ ナル場合、

$$p = k\frac{t}{d} - c$$

k 及 c ハ實驗ヨリ得ル常數ニシテ材料ニヨリ異ナレリ、

(ii) $\frac{t}{d} < 0{\cdot}025$ ナル場合

$$p = k'\left(\frac{t}{d}\right)^3$$

但シ k' ハ實驗ニヨリ定メラレタル常數トス、

William Fairbairn ノ公式

但シ l ガ相当長イ場合ニハ適應セズ.

長サガ両端ノ支点ノ影響ハ中央ニハ関係シナイ.

流体外圧ヲ受ケル薄キ円筒ノ強サ.

「フェアベイルン」ノ実験式.

[1 lbs/in² = 0.07031 kg/cm²]

[$l = 6d \sim 4d$ ノトキニ用フ.]

$p = 9675600\frac{t^{2.19=2}}{ld}$ (lbs/in²)

=

第九章

厚キ圓筒ノ強サ

八六、流體壓力ヲ受クル厚キ圓筒ノ強サ、

厚キ圓筒ガ內面並ニ外面ニ流體壓力ヲ受クル場合ヲ考フ、第 153 圖ハ圓筒ノ直截面ナリ、

r_1＝內半徑、

r_2＝外半徑、

p_1＝內面ニ作用スル流體壓力ノ強サ、

p_2＝外面ニ作用スル流體壓力ノ強サ、

微小體 ABCD ノ面 AB, CD ニハ半徑方向ノ壓力ガ作用シ、AD, BC ニハ周圍方向ノ引張力ガ作用ス、

σ_r＝任意ノ半徑 r ニ於ケル半徑方向ノ壓縮內力、

σ_t＝任意ノ半徑 r ニ於ケル切線方向ノ引張內力、

內半徑 r, 外半徑 $r+\delta r$ ノ輪狀體ニツキ

$l=1$

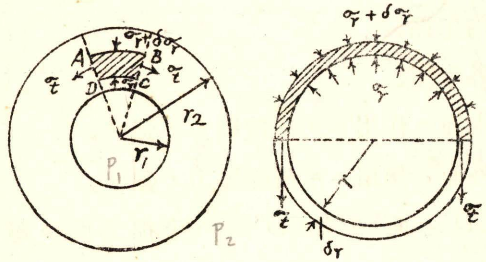
$$2\sigma_r r-2(\sigma_r+\delta\sigma_r)(r+\delta r)=2\sigma_t\delta r$$

微小ナル量ヲ無視シテ　$\delta\sigma_r\cdot\delta r$ 無視

$$\sigma_r\delta r+r\delta\sigma_r+\sigma_t\delta r=0 \qquad \sigma_r+r\frac{\delta\sigma_r}{\delta r}+\sigma_t=0$$

$$\therefore \quad \sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_t=0 \quad \text{.........................} (9\cdot1)$$

即チ



第153図

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r)+\sigma_t=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot 2)$$

軸ニ直角ナル横斷面ハ歪ミノ後ニモ軸ニ直角ナル平面ナルコトヲ假定ス、即チ軸ニ平行ナル歪ミハ零ナルカ又ハ一定ナルモノナリトス、此ノ假定ハ兩端ヨリ相當ノ距離ニアル所ニテハ畧正シキモノト見ルコトヲ得ベシ、

ε_z, σ_z ヲ軸ニ平行ナル方向ノ歪ミ並ニ內力ノ强サトシ，引張ナル場合ニ其ノ符號ハ正號ノモノナリト定ム、

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z+\frac{\sigma_r-\sigma_t}{m}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot 3)$$

更ニ横斷面上ノ總テノ點ニツキ σ_z ガ同一ノ値ヲ有スルモノト假定ス、從テ (9·3) 式ヨリ $\sigma_r-\sigma_t$ ガ一定ナリ、

$$\sigma_r-\sigma_t=2a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot 4)$$

a : const.

ト置ク、

(9·2) ト (9·4) トニヨリ σ_t ヲ消去

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r)+\sigma_r-2a=0$$

即チ

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}=2a-2\sigma_r$$

$$\therefore \quad \frac{d\sigma_r}{a-\sigma_r}=\frac{2dr}{r}$$

$$\therefore \quad -\log_e(a-\sigma_r)=2\log_e r+\text{const.}$$

$$\log_e[r^2(a-a_r)]=\text{const.}$$

$$r^2(a-\sigma_r)=\text{const.}=\beta$$

$$\therefore \quad \sigma_r=a-\frac{\beta}{r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot 5)$$

(9·4) ニヨリ

stress ト strain ノ関係.

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}\right)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_r,\\ \sigma_y&=\sigma_t.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (9.3)$$

σ_z .. r ニ無関係デアル.

(9.2) 單ナル力學上ノ釣合デアル. 何如ナルモノデモ成立ス. 同関デアルす.

(9.3) ニヨリ, stress ト其ノ strain ノ間ノ弾性係数ノ相互関係ナリ.

∴ E, m ヲ持ツ弾性体ニ起ル関係デアル.

$$\sigma_t = -\alpha - \frac{\beta}{r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot6)$$

然ルニ

$$\left.\begin{array}{ll} r = r_1, & \sigma_r = p_1 \\ r = r_2, & \sigma_r = p_2 \end{array}\right\}$$

$$\therefore \quad p_1 = \alpha - \frac{\beta}{r_1^2}, \qquad p_2 = \alpha - \frac{\beta}{r_2^2}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{p_2 r_2^2 - p_1 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \beta = \dfrac{(p_2 - p_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot7)$$

(9•5) ト (9•6) トニ (9•7) ヲ入レテ

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2 + \dfrac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2}\right] \\ \sigma_t = \dfrac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 + \dfrac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r^2}\right] \end{array}\right\} \cdots\cdots (9\cdot8)$$

外面ニ作用スルヲ流體壓力 p_2 ガ小ニシテ零ト見做シ得ル場合ニハ

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\sigma_r = \dfrac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \dfrac{r_2^2 - r^2}{r^2}} \\ \boxed{\sigma_t = \dfrac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \dfrac{r_2^2 + r^2}{r^2}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot9)$$

σ_r, σ_t ハ圓筒或ハ管ノ内表面ニ於テ最大ニシテ其ノ値ハ

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{r\,max} = p_1 & \boxed{\sigma_r = p_1} \\ \sigma_{t\,max} = & \boxed{\sigma_{t,1}} = \dfrac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p_1 = \dfrac{k^2 + 1}{k^2 - 1} p_1 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (9\cdot10)$$

但シ $\boxed{k = \dfrac{r_2}{r_1}}$ $\dfrac{外径}{内径}$

流体圧力ヲ受ク厚キ円筒ノ強サ.

(1) 最大主応力説.

$\sigma_t = \sigma_e \qquad \dfrac{k^2+1}{k^2-1} p_1 = \sigma_e \qquad \dfrac{p_1}{\sigma_e} = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}.$

鋳鉄ニ用ヒラル

$\sigma_e = \sigma_B$ (破壊強サ).

(2) 最大剪断応力説.

$\dfrac{p_1}{\sigma_e} = \dfrac{k^2-1}{2k^2} \quad (\sigma_r + \sigma_t = \sigma_e.)$

(3) 歪「エネルギー」説.

$\sigma_{r\,max} = p_1$

$\sigma_{t\,max} = \dfrac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} p_1 = \dfrac{k^2+1}{k^2-1} p_1.$ (内表面ニテ最大)

$\sigma_r = \dfrac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \dfrac{r_2^2 - r^2}{r^2}$

コヽニテ用ル圧力ハ gage 圧力ニシテ 絶体圧力ニ非ズ.

$\sigma_t = \dfrac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \dfrac{r_2^2 + r^2}{r^2}.$

(i) 最大主内力説ニヨレバ

$$\sigma_t=\sigma_e$$

但シ σ_e ハ引張試験ニ於ケル材料ノ弾性限界ニ於ケル内力ナリ、是ニ由テ

$$\frac{k^2+1}{k_2-1}p_1=\sigma_e$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{p_1}{\sigma_e}=\frac{k^2-1}{k^2+1}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot11)$$

(ii) 最大剪断内力説ニ従ヘバ主内力 σ_r ト σ_t トハ一ハ壓縮内力，他ハ引張内力ナルヲ以テ

$$\sigma_r+\sigma_t=\sigma_e$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{p_1}{\sigma_e}=\frac{k^2-1}{2k^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot12)$$

(iii) 歪ミ「エネルギー」説ニヨレバ長サノ方向ノ内力ヲ無視シテ，

$$\sigma_r^2+\sigma_t^2+\frac{2}{m}\sigma_r\sigma_t=\sigma_e^2$$

(9.10)

$$\therefore\quad p_1^2+\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2p_1^2+\frac{2}{m}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)p_1^2=\sigma_e^2$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{p_1}{\sigma_e}=\frac{k^2-1}{\sqrt{2\frac{m+1}{m}k^4+2\frac{m-1}{m}}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot13)$$

鑄鐵並ニ軟鋼ニツキ「クツク」(Cook) 及「ロバートソン」(Robertson) ノ實驗ニヨレバ，軟鋼ニツキテハ歪ミ「エネルギー」説ガ實驗ト一致シ，鑄鐵ニツキテハ最大主内力説ガ實驗ニ適合スルガ如シ、但シ鑄鐵ニツキテ σ_e ハ破壊强サ σ_B ナリ、即チ $\boxed{\sigma_e=\sigma_B}$ トス。

脆キ材料ニツキ最大主内力説ヲ採用スルモノトスレバ

$$\frac{k^2-1}{k^2+1}=\frac{p_1}{\sigma_B}$$

48頁 下

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=\tau_{max}\doteq\frac{1}{2}\sigma_2$$

$$\therefore\ \sigma_t-(-\sigma_r)=\sigma_e \qquad \sigma_r+\sigma_t=\sigma_e$$

→ σ_z 内力ヲ無視.

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\frac{2}{m}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\sigma_e^2$$

第三ノ内力 σ_3 ヲ無視スル

$\sigma_1=\sigma_t$　　$\sigma_2=-\sigma_r$ ヲ代入スル.

$$\therefore \qquad k^2 = \frac{\sigma_B + p_1}{\sigma_B - p_1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9 \cdot 14)$$

故ニ若シモ

$$p_1 = \sigma_B$$

ナル如キ内壓ニ對シテ k ハ無限大トナルベシ、即チ如何ニ厚サヲ增スモ、其ノ材料ノ破壞强サニ等シキ內壓ニ抵抗シ得ル如キ管ヲ製作スルコト能ハズ、

軟鋼ノ如キ延性ニ富ム材料ニツキ歪ミ「エネルギー」說ヲ採用スレバ

$$\frac{(k^2-1)^2}{2\left(\dfrac{m+1}{m}k^4 + \dfrac{m+1}{m}\right)} = \frac{p_1^2}{\sigma_e^2}$$

即チ

$$\left(1 - \frac{2p_1^2}{\sigma_e^2}\frac{m+1}{m}\right)k^4 - 2k^2 + \left(1 - \frac{2p_1^2}{\sigma_e^2}\frac{m-1}{m}\right) = 0$$

$$\therefore \qquad k^2 = \frac{1 \pm 2\lambda\sqrt{1 - \dfrac{m^2-1}{m^2}\lambda^2}}{1 - 2\lambda^2\dfrac{m+1}{m}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9 \cdot 15)$$

但シ $\lambda = \dfrac{p_1}{\sigma_e}$, m ハ普通 $\dfrac{10}{3}$ トナル、根號內ノモノハ λ ガ 1 ヨリ小ナレバ正號トナルベシ、而シテ上式ノ複符號ノ中正號ノモノヲ考フレバ k ガ實數ナルタメノ條件ハ

$$\lambda^2 < \frac{m}{2(m+1)}$$

即チ

$$\frac{p_1}{\sigma_e} < \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9 \cdot 16)$$

$$k = +\sqrt{\frac{1+2\lambda\sqrt{1-\frac{m^2-1}{m^2}\lambda^2}}{1-2\lambda^2\frac{m+1}{m}}}$$

実数ナル為ニハ

$2\lambda^2\frac{m+1}{m} > 0$ ナルコトヲ要ス

$\frac{r_2'}{r_1'} = k' < k = \frac{r_2}{r_1}$ （kハ最大ノモノヲ考ヘバ）

$\sqrt{1-2\lambda}$ ノ一ハ内圧ニハ

$m=\frac{10}{3}$ トオケバ

$$\boxed{p_1<0.620\,\sigma_e}$$

ナラザル可ラズ、

(9·3) ニヨリ $\varepsilon_z=0$ ナル如クニ兩端ガ固定サレタル場合ノ σ_z ヲ求ムレバ

$$\sigma_z=-\frac{(\sigma_r-\sigma_t)}{m}=\frac{2(p_1r_1^2-p_2r_2^2)}{m(r_2^2-r_1^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot17)$$

若シ又一端自由ニシテ $\sigma_z=0$ ナルトキハ

$$\varepsilon_z=\frac{1}{mE}(\sigma_r-\sigma_t)=\frac{2(p_2r_2^2-p_1r_1^2)}{mE(r_2^2-r_1^2)}. \quad \cdots\cdots\cdots (9\cdot18)$$

例題一、 內徑 150 mm, 外徑 250 mm ノ管アリ、0.7 kg/mm² ノ內壓ヲ受クルトキ橫斷面上ノ各點ニ於ケル主內力ヲ求メヨ、

$$2r_1=150 \text{ mm} \qquad r_1=75 \text{ mm}$$

$$2r_2=250 \text{ mm} \qquad r_2=125 \text{ mm}$$

$$p_1=0.7 \text{ kg/mm}^2$$

σ_r 及 σ_t ノ最大値ハ內面ニアリテ

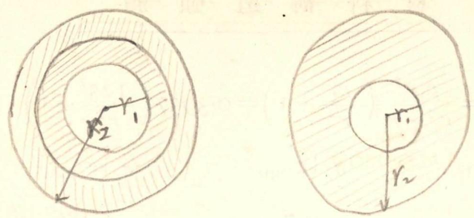
$$\sigma_{r,\max.}=p_1=0.7 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{t,\max.}=\frac{k^2+1}{k^2-1}p_1\doteqdot\frac{\left(\frac{125}{75}\right)^2+1}{\left(\frac{125}{75}\right)^2-1}\times0.7=1.486 \text{ kg/mm}^2$$

其ノ他ノ點ニ於テ

$$\sigma_r=\frac{p_1r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r^2}-1\right)=\frac{0.7\times75^2}{125^2-75^2}\left(\frac{125^2}{r^2}-1\right)$$

$$=0.3937\left(\frac{125^2}{r^2}-1\right)$$



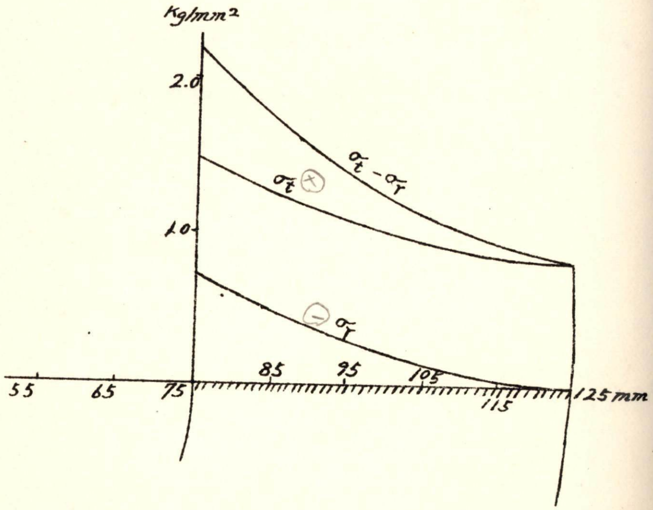
何枚モ重ネ合スト一枚ヨリ強度大ナルノヲ得ル、仍テ「焼バメ」ヲ用ヒ適當ニ組合ス

コノ方ヲ利用シテ砲身等ニ用フ

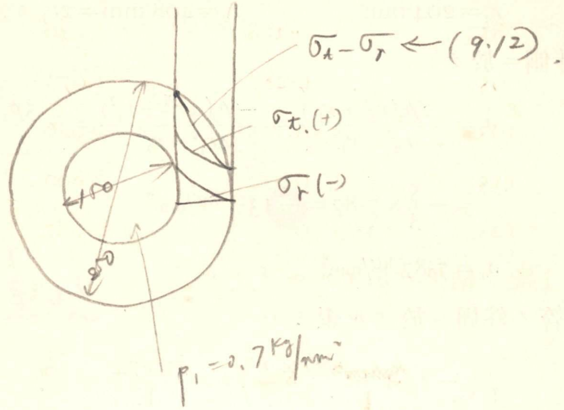
$$\sigma_t=\frac{p_1r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r^2}+1\right)=0{\cdot}3937\left(\frac{125^2}{r^2}+1\right)$$

r mm	σ_r kg/mm²	σ_t kg/mm²
75	0·7	1·486
85	0·458	1·246
95	0·287	1·075
105	0·165	0·946
115	0·072	0·899
125	0·0	0·787

次ノ圖ハ上記ノ結果ヲ示モルモノナリ、



例題二、 外徑 1020 mm ノ B 管ト内徑 408 mm, 外徑 816 mm ノ A 管トノ燒キ嵌メヲナスニ際シ, 兩管ノ間ノ燒キ嵌メ壓力ヲ 7.87 kg/mm² トナサントス、E＝20470 kg/mm², $m=\frac{10}{3}$ トシテ A 管



ノ外徑トB管ノ內徑トノ差ヲ如何ニナスベキカ、

燒キ嵌メノ後ノ A 管ニツキ

$$p_1=0 \qquad p_2=7{\cdot}87\ \mathrm{kg/mm^2}$$

$$r_1=204\ \mathrm{mm} \qquad r_2=408\ \mathrm{mm}=2r_1$$

A 管ノ外側ニ於テ

$$\sigma_t=\frac{-p_2(r_2^2+r_1^2)}{r_2^2-r_1^2}=\frac{-p_2(4r_1^2+r_1^2)}{4r_1^2-r_1^2}=-\frac{5p_2}{3}$$

$$=-\frac{5}{3}\times 7{\cdot}87=-13{\cdot}1\ \mathrm{kg/mm^2}$$

$\sigma_r=p_2$　　$\sigma_r=7{\cdot}87\ \mathrm{kg/mm^2}$

$\varepsilon_t=\frac{1}{E}\left(\sigma_t+\frac{\sigma_r}{m}\right)$

故ニ A 管ノ外周ニ於ケル歪ミハ

$$\frac{1}{E}\left(-13{\cdot}1+\frac{7{\cdot}87\times 3}{10}\right)=-\frac{10{\cdot}74}{E}$$

此ノ外周ノ歪ミハ亦其ノ直徑又ハ半徑ノ歪ナリ、

次ニ B 管ニツキ

$$p_1=7{\cdot}87\ \mathrm{kg/mm^2} \qquad p_2=0$$

$$r_1=408\ \mathrm{mm} \qquad r_2=510\ \mathrm{mm}=\frac{5}{4}r_1$$

B 管ノ內側ニ於テ

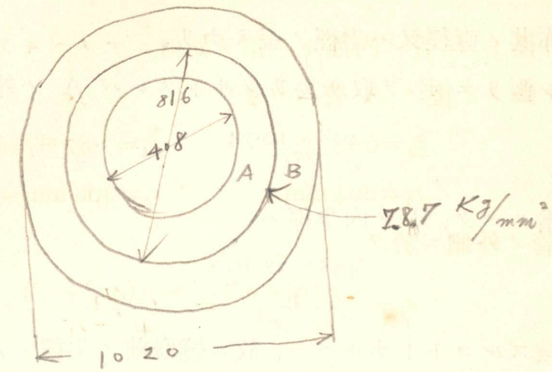
$$\sigma_t=\frac{p_1(r_2^2+r_1^2)}{r_2^2-r_1^2}=\frac{p_1\left(\frac{25}{16}r_1^2+r_1^2\right)}{\frac{25}{16}r_1^2-r_1^2}=\frac{41}{9}p_1$$

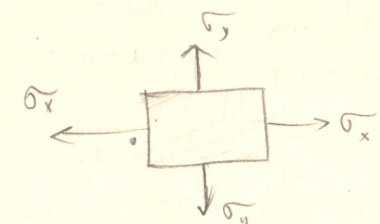
$$=\frac{41}{9}\times 7{\cdot}87=35{\cdot}5\ \mathrm{kg/mm^2}$$

$$\sigma_r=7{\cdot}87$$

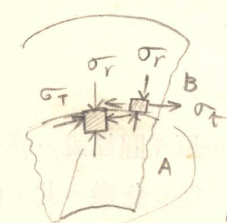
故ニ B 管ノ內側ニ於ケ歪ミハ

$$\frac{1}{E}\left(35{\cdot}8+7{\cdot}87\times\frac{3}{10}\right)=\frac{38{\cdot}16}{E}$$





$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\sigma_x}{E}-\dfrac{\sigma_y}{mE}\\[2mm] \varepsilon_y=\dfrac{\sigma_y}{E}-\dfrac{\sigma_x}{mE}\end{cases}$$



$$\varepsilon_t=\frac{-\sigma_t}{E}-\frac{-\sigma_r}{mE}$$

$$d\rightarrow d-\delta d.$$

$$\varepsilon_t=\frac{\pi d-\pi(d-\delta d)}{\pi d}=\frac{\pi\cdot\delta d}{\pi d}=\frac{\delta d}{d}$$

$$\varepsilon_t=\frac{\sigma_t}{E}-\frac{-\sigma_r}{mE}=\frac{1}{E}\left(\sigma_t+\frac{\sigma_r}{m}\right)$$

是ハ亦其ノ直徑又ハ半徑ノ歪ミナリ、

若シ假リニBヲ取リ去リタリトスレバAノ外徑ハ

$$\frac{408\times 10.74}{E}$$

$r_2\varepsilon_t$

ダケ增スベク，Bノ内半徑ハ

$$\frac{408\times 38.16}{E}$$

ダケ減ズルコトトナルベシ、故ニ燒嵌前ノ半徑ノ差ハ

$$\frac{408\times(10.47+38.16)}{E}=\frac{408\times 48.9}{20470}$$

$$=0.974\ \mathrm{mm}$$

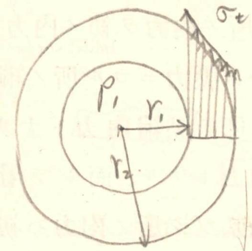
直徑ニツキテハ

$$0.974\times 2=1.948\ \mathrm{mm}$$

八七、層成筒——層成砲、

前節ニ述ベタル如ク流體内壓力ヲ受クル厚キ圓筒或ハ管ハ其ノ内壁ニ於テ最大内力ヲ受ケ，外壁ニ近クニ從ヒ急激ニ其ノ内力ヲ減ズルモノナリ、例ヘバ外壁ニ於ケル流體壓力ガ零ナル場合，$r_2/r_1=2$ トスレバ前節 (9・9) ニヨリ縮張内力ハ内壁ニ於テハ外壁ニ於ケル値ノ 2.5 倍トナルベシ、是ニ由テ材料ハ甚ダ不經濟ニ使用セラルルコトナルベシ、尙前節ニ述ベタル如ク管ノ堪エ得ル流體内壓力ニハ其ノ材料ニヨリテ一定ノ限度アリ，其ノ厚サヲ如何ニ增ストモ或程度以上ノ流體内壓力ニハ抵抗スルコト能ハズ、是ニ由テ内力分布ノ不平均ヲ少クシ，材料ヲ有効ニ使用シ強大ナル流體内壓力ニ堪ユルモノトナスタメ，單一ナル管トナサズシテ數

(9.9)　$\frac{r_2}{r_1}=2$

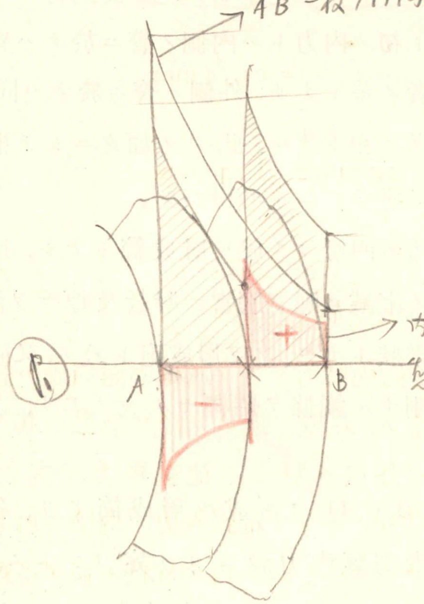


$\sigma_{t_1}=\frac{5}{3}p_1$

$\sigma_{t_2}=\frac{2}{3}p_1$

$\therefore\ \frac{\sigma_{t_1}}{\sigma_{t_2}}=2.5$

$\overline{AB}$ 一枚ノ円筒トシタ場合



内外二層トシテ通常ノ焼嵌ノ様態トス

個ノ同心ノ管ヲ燒キ嵌メタル層成筒 (Compound cylinder) トナスモノトス、而シテ燒キ嵌メニヨリ外側ノ管ハ其ノ縮ミ (Shrinkage) ニ基ヅク所ノ壓力ヲ之ニ接觸セル內側ノ管ニ作用ス、此ノ壓力ニ基ヅク所ノ內力ヲ初ノ內力 (Initial stresses) ト云フ、前節例題二ニヨリ知ラルル如ク燒キ嵌メ壓力ニヨル所ノ締張內力ハ其ノ內側ノ管ニ對シテハ負號ノモノ即チ壓縮內力トナリ，外側ノ管ニ對シテハ正號ノモノ即チ引張內力トナル、而シテ層成筒ノ內壁ニ流體壓力ガ加ハルトキニハ之ニ基ヅク所ノ內力ハ初ノ內力ニ重ネテ代數的ニ加ヘラルベキモノニシテ，締張內力ニツキテハ流體內壓力ニヨルモノト初ノ內力トハ內側ノ管ニ於テハ異符號ナルヲ以テ其ノ强サハ兩者ノ差トナリ，外側ノ管ニ於テハ同符號ナルヲ以テ其ノ强サハ兩者ノ和トナル、此クノ如クニシテ締張內力ノ分布ノ甚シキ不平均ヲ避クルコトヲ得ベシ、

砲身ノ如キモ亦二層乃至四層ヨリ成ル層成筒トナシ，尾栓部ヨリ砲口ニ至ル瓦斯壓力ノ漸減ニ應ジ適當ニ層數及厚サヲ減ジ，其ノ外形ヲ一種ノ階梯圓錐狀トナス、之ヲ層成砲 (Built-up gun) ト云フ、又同樣ノ目的ヲ以テ筒ノ外部ニ强剛ナル鋼條ヲ捲纒セルモノアリ、之ヲ鋼線砲 (Wire gun) ト云フ、

例題、四側ノ管 A, B, C, D ヨル成ル層成筒アリ、各管ノ間ノ燒キ嵌メ壓力ヲ最大剪斷內力說ニヨリ定メントス、但シ各管ノ大サハ圖ニ示セルガ如ク，又材料ノ單純引張ノ彈性限界ハ 47.1 $\mathrm{kg/mm^2}$ ニシテ，層成筒ニ於テ許サルベキ剪斷內力ノ最大値ハ引張試驗ニ於テノ彈性限界ニ於ケル最大剪斷內力ノ $\frac{1}{3}$ ナリトス、又層成筒內部ニ起ル爆發壓力ハ 1300 $\mathrm{kg/cm^2}$ ナリトス、

此ノ場合最大剪斷內力說ニヨル所ノ條件ハ

$$\sigma_r+\sigma_t \ngtr \frac{1}{3}\times 47{\cdot}1\ \mathrm{kg/mm^2}$$

即チ

$$\sigma_r+\sigma_t \ngtr 15{\cdot}7\ \mathrm{kg/mm^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

層成筒全體ヲ單一ナル管ト見做シ爆發壓力ニ基ヅク所ノ$\sigma_r+\sigma_t$ヲ求ムルニ、$p_2=0$ナルヲ以テ前節(9·9)ニヨリ

$$\sigma_r+\sigma_t=\frac{2p_1r_1^2r_2^2}{(r_2^2-r_1^2)r^2}$$

而シテ

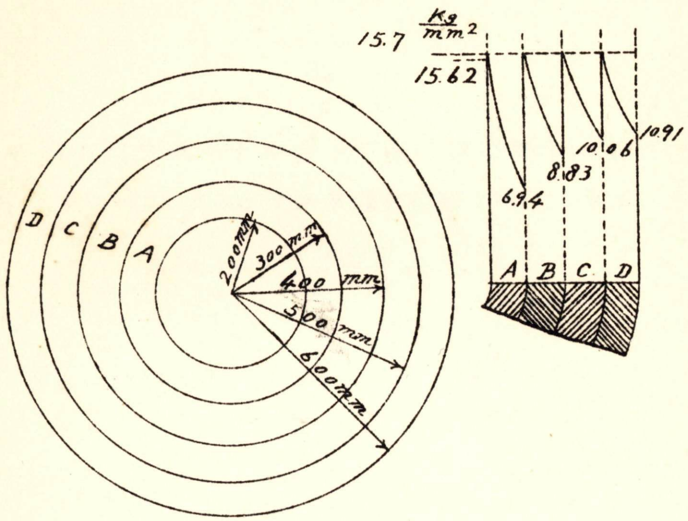
$$p_1=13\ \mathrm{kg/mm^2}\ ,\quad r_1=200\ \mathrm{mm}\ ,\quad r_2=600\ \mathrm{mm}$$

故ニ

$$\sigma_r+\sigma_t=\frac{2\times 13\times 2^2\times 6^2\times 10^8}{(6^2-2^2)\times 10^4r^2}=\frac{117\times 10^4}{r^2}\quad \ldots\ \ldots \text{(ii)}$$

是ニヨリテ次ノ表中ノ第三行ノ數ヲ得ベシ、

	r	r^2	爆發ニ基ヅク所ノ $\sigma_r+\sigma_t$	冷却ニ基ヅク所ノ $\sigma_r+\sigma_t$	燒キ嵌メニ基ヅク所ノ半徑ノ方向ノ壓力	合成セル $\sigma_r+\sigma_t$
A ノ內側	200	40000	29·25	−13·63	0	15·62
A ノ外側	300	90000	13·00	−6·06	3·785	6·94
B ノ內側	300	90000	13·00	2·70	3·785	15·7
B ノ外側	400	160000	7·31	1·52	3·194	8·83
C ノ內側	400	160000	7·31	8·39	3·194	15·7
C ノ外側	500	250000	4·68	5·38	1·684	10·06
D ノ內側	500	250000	4·68	11·02	1·684	15·7
D ノ外側	600	360000	3·25	7·66	0	10·91



B, C, D ノ内側ニ於テ冷縮ニ基ヅク所ノ $\sigma_r+\sigma_t$ ハ (i) ノ條件ニヨリ定メラレ B, C, D ニツキ夫々 2·70, 8·39, 11·02 ナリ、第四行ノ數字ノ中ニ線ヲ附シタルモノ是ナリ、第四行ノ他ノ數ヲ定ムル前ニ第五行ノ數, 即チ各管ノ間ノ半徑ノ方向ノ燒キ嵌メ壓力ヲ定ムベシ、任意ノ管ノ内側ニ於テハ前節 (9·8) ニヨリ

9.8. r=r₁

$$\sigma_r+\sigma_t=\frac{2(p_1-p_2)r_2^2}{r_2^2-r_1^2} \qquad \text{(iii)}$$

故ニ D ニツキテハ

$$p_2=0, \qquad \sigma_r+\sigma_t=11{\cdot}02\ \mathrm{kg/mm^2}$$

$$r_2=600\ \mathrm{mm} \qquad r_1=500\ \mathrm{mm}$$

$$\therefore \quad 11{\cdot}02=\frac{2p_1\times 6^2\times 10^4}{(6^2-5^2)\times 10^4}$$

$$11{\cdot}02=\frac{72}{11}p_1$$

$\therefore \qquad p_1 = 1{\cdot}684 \text{ kg/mm}^2$

C ニツキテハ

$$p_2 = 1{\cdot}684 \text{ kg/mm}^9 \qquad \sigma_r + \sigma_t = 8{\cdot}39 \text{ kg/mm}^2$$

$$r_2 = 500 \text{ mm} \qquad r_1 = 400 \text{ mm}$$

$$8{\cdot}39 = \frac{2(p_1 - 1{\cdot}684) \times 5^2 \times 10^4}{(5^2 - 4^2) \times 10^4}$$

$$8{\cdot}39 = \frac{50}{9}(p_1 - 1{\cdot}684)$$

$\therefore \qquad p_1 = 3{\cdot}194 \text{ kg/mm}^2$

B ニツキテハ

$$p_2 = 3{\cdot}194 \text{ kg/mm}^2 \qquad \sigma_r + \sigma_t = 2{\cdot}70 \text{ kg/mm}^2$$

$$r_2 = 400 \text{ mm} \qquad r_1 = 300 \text{ mm}$$

$\therefore \qquad 2{\cdot}70 = \dfrac{2(p_1 - 3{\cdot}194) \times 4^2 \times 10^4}{(4^2 - 3^2) \times 10^4}$

$\therefore \qquad 2{\cdot}70 = \dfrac{32}{7}(p_1 - 3{\cdot}194)$

$\therefore \qquad p_1 = 3{\cdot}785 \text{ kg/mm}^2$

是ニヨリテ第五行ハ完成シタリ、

次ニ第四行ヲ完成スベシ、各ノ外側ニ於テ

(9.8 r=r₂)

$\therefore \qquad \sigma_r + \sigma_t = \dfrac{2(p_1 - p_2) r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$

D ニツキテハ

$$p_2 = 0, \qquad p_1 = 1{\cdot}684 \text{ kg/mm}^2$$

$$r_2 = 600 \text{ mm} \qquad r_1 = 500 \text{ mm}$$

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{2 \times 1{\cdot}684 \times 5^2 \times 10^4}{(6^2 - 5^2) \times 10^4} = 7{\cdot}66 \text{ kg/mm}$$

C ニツキテハ

$$p_2 = 1{\cdot}684\ \mathrm{kg/mm^2} \qquad p_1 = 3{\cdot}194\ \mathrm{kg/mm^2}$$

$$r_2 = 500\ \mathrm{mm} \qquad r_1 = 400\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{2\times(3{\cdot}194 - 1{\cdot}684)\times 4^2 \times 10^4}{(5^2-4^2)\times 10^4} = 5{\cdot}38\ \mathrm{kg/mm^2}$$

B ニツキテハ

$$p_2 = 3{\cdot}194\ \mathrm{kg/mm^2} \qquad p_1 = 3{\cdot}785\ \mathrm{kg/mm^2}$$

$$r_2 = 400\ \mathrm{mm} \qquad r_1 = 300\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{2\times(3{\cdot}785 - 3{\cdot}194)\times 3^2 \times 10^4}{(4^2-2^2)\times 10^4} = 1{\cdot}52\ \mathrm{kg/mm^2}$$

A ニツキテハ

$$p_2 = 3{\cdot}785\ \mathrm{kg/mm^2} \qquad p_1 = 0$$

$$r_2 = 300\ \mathrm{mm} \qquad r_1 = 200\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{-2\times 3{\cdot}785 \times 2^2 \times 10^4}{(3^2-2^2)\times 10^4} = -6{\cdot}60\ \mathrm{kg/mm^2}$$

A ノ內側ニツキテハ (iii) ニヨリ

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{-2\times 3{\cdot}785 \times 3^2 \times 10^4}{(3^2-2^2)\times 10^4} = -13{\cdot}63\ \mathrm{kg/mm^2}$$

是ニヨリテ第四行ハ完成セリ、第五行ハ第三行ト第四行トノ和ニシテ $\sigma_r + \sigma_t$ ノ實際ノ値ナリ、

表ニヨリテ見ル如ク層成筒ニ於ケル $\sigma_r + \sigma_t$ ノ最大ナル値ハ全體ガ單一ナル管ナル場合ノ約半分トナレリ，且ツ單一管トシテハ安全限界ヲ超過スルモノガ之ヲ層成筒トナスコトニヨリ安全限界內ニアラシムルコトヲ得タリ、

八八、實驗軸ニ於ケル打込嵌メ、

体

Driving fit

管ノ外徑ヲ $2r_2$ トシ内徑ヲ $2r_1-\delta$ トス、實體軸ノ直徑ヲ $2r_1$ トス、E_1, E_2 ヲ夫々實體軸及管ノ「ヤング」係數トシ, $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}$ ヲ夫々ノ「ポアソン」比トス、

第八六節ノ (9•5) ト (9•6) トヲ再記スレバ

$$\sigma_r=\alpha-\frac{\beta}{r^2}$$

$$\sigma_t=-\alpha-\frac{\beta}{r^2}$$

軸ノ中心即チ $r=0$ ニ於テモ内力ハ無限大トハナラザルベキヲ以テ

$$\beta=0$$

故ニ

$$\sigma_r=-\sigma_t=\alpha=\text{常數}$$

是ニ由テ軸ノ内部ノ總テノ點ニ於テ σ_t ト σ_r トハ相等シク且ツ r ニ無關係ナル常數ナリ、尚又 σ_t モ σ_r モ共ニ壓縮内力ナリ、此ノ一定ナル内力ハ軸ト管トノ間ノ壓力 p_1 ナリ、故ニ軸ノ外周ニ於ケル壓縮歪ミハ $\sigma_t=-p_1$ ナルヲ以テ

$$-\left(\frac{\sigma_t}{E_1}+\frac{p_1}{m_1E_1}\right)=\frac{p_1}{E_1}\left(1-\frac{1}{m_1}\right)\cdots\cdots\cdots (9\cdot19)$$

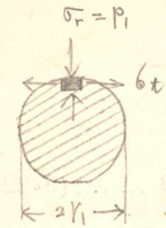
管ノ内面ニ於ケル箍張内力ハ, δ ヲ r_1 ニ對シ無視スレバ

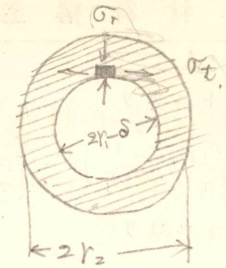
(9.10) より

$$\boxed{\sigma_{t_1}=\frac{p_1(r_2^2+r_1^2)}{r_2^2-r_1^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot20)$$

又内周ニ於ケル引張歪ミハ

$$\frac{\sigma_{t_1}}{E_2}+\frac{p_1}{m_2E_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot21)$$





$\sigma_r = p_1$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_1} + \frac{\sigma_r}{m_1E_1} = \frac{\sigma_t}{E_1} + \frac{p_1}{m_1E_1}$$

$$-\sigma_t = \sigma_r = p_1 \qquad \therefore \varepsilon_t = \frac{-p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_1m_1}$$

$$= -\frac{p_1}{E_1}\left(1-\frac{1}{m_1}\right) \text{------} (9.19)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_{t1}}{E_2} + \frac{\sigma_r}{m_2E_2} = \frac{\sigma_{t1}}{E_2} + \frac{p_1}{m_2E_2} \text{---------} (9.21)$$

$\sigma_t = \sigma_r = -p_1$

$\boxed{\sigma_t \cdot \sigma_{t1}}$?

(9・19) ト (9・21) トニヨリ

$$2r_1\left\{\frac{p_1}{E_1}\left(1-\frac{1}{m_1}\right)+\frac{p_1}{m_2E_2}+\frac{\sigma_{t1}}{E_2}\right\}=\delta \quad \cdots\cdots (9\cdot22)$$

(9・20) ト (9・22) トニヨリ

$$2r_1\sigma_{t1}\left\{\left(1-\frac{1}{m_1}\right)\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}\cdot\frac{1}{E_1}+\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}\cdot\frac{1}{m_2E_2}+\frac{1}{E_2}\right\}=\delta$$

即チ

$$\boxed{\sigma_{t1}\left\{\left(\frac{m_1-1}{m_1E_1}+\frac{1}{m_2E_2}\right)\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}+\frac{1}{E_2}\right\}=\frac{\delta}{2r_1}} \cdots \boxed{(9\cdot23)}$$

例題、 直徑 200 mm. ノ實體軸ヲ外徑 300 mm. ノ管ニ燒嵌ヲ行ヒ，管ト軸トノ間ノ壓力ヲ 3.15 $^{kg}/_{mm^2}$ ナラシメントス、管ノ內徑ト實體軸トノ燒嵌前ノ差ヲ求ム、但シ $E=21600\ ^{kg}/_{mm^2}$, $m=\frac{10}{3}$ トス、

$$r_1=100\ \mathrm{mm} \qquad r_2=150\ \mathrm{mm}=\frac{3}{2}r_1$$

$$p_1=3{\cdot}10\ ^{kg}/_{mm^2}$$

$$E_1=E_2=21600\ ^{kg}/_{mm^2}$$

$$m_1=m_2=\frac{10}{3}$$

(9・20) ヨリ

$$\sigma_{t1}=\frac{p_1(r_2^2+r_1^2)}{r_2^2-r_1^2}=\frac{p_1\left(\frac{9}{4}r_1^2+r_1^2\right)}{\frac{9}{4}r_1^2-r_1^2}=\frac{13}{5}p_1$$

$$=\frac{13}{5}\times3{\cdot}15=8{\cdot}19\ ^{kg}/_{mm^2}$$

(9・23) ヨリ

$$\delta=\frac{2r_1\sigma_{t1}}{E}\left\{\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}+1\right\}=\frac{2\times100\times8{\cdot}19}{21600}\times\frac{18}{13}=0{\cdot}105\ \mathrm{mm}$$

上記ノ計算ハ實體軸ノ壓縮性ガ考慮セラレタルモノナルモ，若シ其ノ壓縮性ヲ無視スレバ計算ハ次ノ如クナルベシ、第八六節(9•10) ニヨリ，或ハ本節 (9•20) ニヨリ

$\sigma_r = p_1$

$$\sigma_{t,1} = \frac{p_1(r_2^2+r_1^2)}{r_2^2-r_1^2} = 3{\cdot}15 \times \frac{13}{5} = 8{\cdot}19\ \mathrm{kg/mm^2}$$

管ノ内周ノ歪ミ，従ツテ其ノ内徑ノ歪ミハ

$$\varepsilon = \frac{\overset{\sigma_{t,1}}{8{\cdot}19}}{\mathrm{E}} + \frac{\overset{\sigma_r}{3{\cdot}15}}{m\mathrm{E}} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(8{\cdot}19 + 3{\cdot}15 \times \frac{3}{10}\right)$$

$$= \frac{9{\cdot}135}{\mathrm{E}} = \frac{9{\cdot}135}{21600}$$

歪ミヲ受クル前ノ管ノ内半徑ヲ r_0 トスレバ

$$r_0(1+\varepsilon) = 100\ \mathrm{mm}$$

$100 = r_0(1+\varepsilon)$ $(r_0 + r_0\varepsilon)$

$$\therefore\ 100 - r_0 = r_0\varepsilon$$

$100 - r_0 = 0.042$

$$\fallingdotseq 100\varepsilon = \frac{100 \times 9{\cdot}135}{21600} = 0{\cdot}042$$

$$\therefore\ \delta = 2(100 - r_0) = 0{\cdot}042 \times 2 = 0{\cdot}084\ \mathrm{mm}$$

直徑

即チ壓縮性ヲ考慮セルモノハ之ヲ無視セルモノヨリ 25% 大ナリ、$\delta = 0{\cdot}084$ トシテ p_1 ヲ求ムレバ $2{\cdot}52\ \mathrm{kg/mm^2}$ トナルベシ、

八九、鋼條ニヨリ捲カレタル管、

r_1, r_2 ヲ管ノ内半徑及外半徑トシ，r_3 ヲ捲キ終リタル後ノ全體ノ半徑トス、第 154 圖ヲ參照スベシ、

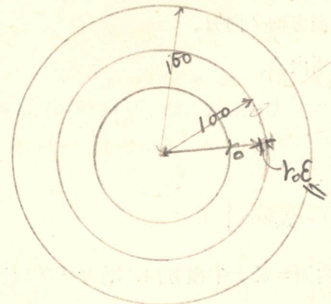
P＝爆發又ハ他ノ原因ニヨル内壓力ノ强サ、

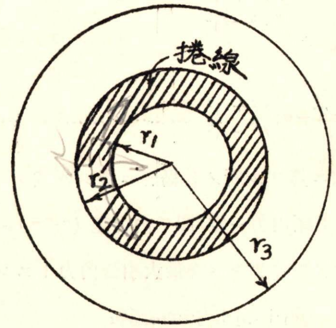
σ_1＝内壓力ニ基ヅク所ノ半徑方向ノ内力、

$\sigma_{t,1}$＝内壓力ニ基ヅク所ノ箍張内力、

σ_0＝初ノ半徑方向ノ内力、

$\sigma_{t,0}$＝初ノ箍張内力、





第154図

T＝半徑 r ナル位置ニ於ケル鋼條ノ引張內力、

$\sigma_0+\sigma_1$＝結局ノ半徑方向ノ內力、

$\sigma_{t,0}+\sigma_{t,1}$＝結局ノ纏張內力、

爆發ノ起ル前ニ於ケル釣合ニ關スル式ハ第八六節 (9·1), (9·2) ニ與ヘタルト同樣ニ

$$\left.\begin{aligned} & r\frac{d\sigma_0}{dr}+\sigma_0+\sigma_{t,0}=0 \\ \text{又ハ}\quad & \frac{d}{dr}(r\sigma_0)+\sigma_{t,0}=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (9\cdot24)$$

r ナル位置ニ於ケル鋼條捲線ノ內側ニ於テ半徑方向ノ壓力ハ單位面積ニツキ σ_0 ニシテ，是ハ $r=r$ ト $r=r_3$ トノ間ノ鋼條ノ總テノ層ニ基ヅクモノナリ、是ニ由テ是等ノ外層ノ鋼條ハ內層ノ鋼條即チ $r=r_1$ ト $r=r_2$ トノ間ニアル各層ノ鋼條ノ周方向ノ引張內力ノ減少ヲ來サシムルモノナリ、

$r=r_1$ ヨリ $r=r$ 迄ヲ均等質ナル管ナリト考フレバ，外壓力トシテ作用セル σ_0 ニヨリテ周方向ノ引張內力ノ減少量ハ

$$\sigma_0\frac{r^2+r_1^2}{r^2-r_1^2}$$

故ニ

$$\sigma_{t,0}=\mathrm{T}-\sigma_0\frac{r^2+r_1^2}{r^2-r_1^2} \quad \cdots\cdots\cdots (9\cdot25)$$

(9·24), (9·25) ハ次ニ述ブル所ノ各場合ニ通ズル式ナリ、

(i)　全體ヲ通ジテ剪斷內力一定，即チ內力差 $(\sigma+\sigma_t)$ 一定ノ場合、

σ_a ヲ單純引張ニ於ケル許サルベキ最大引張內力トスレバ

$$\sigma_1+\sigma_{t,1}+\sigma_0+\sigma_{t,0}\leqq\sigma_a$$

此ノ條件滿足スル樣ニ T 及 r_3 ヲ r ノ函數トシテ求メントス、

$$\sigma_1+\sigma_{t,1}+\sigma_0+\sigma_{t,0}=\sigma_a \quad \cdots\cdots\cdots (a)$$

第八六節 (9·9) ヲ參照シテ

$$\sigma_1+\sigma_{t,1}=\frac{2\mathrm{P}r_3^2}{(r_3^2-r_1^2)r^2}=\frac{cr_1^2}{r^2} \quad \cdots\cdots\cdots (b)$$

但シ

$$c=\frac{2\mathrm{P}r_3^2}{r_3^2-r_1^2} \quad \cdots\cdots\cdots (c)$$

(a) ト (b) トヨリ

$$\sigma_0+\sigma_{t,0}=\sigma_a-c\,\frac{r_1^2}{r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

(9·25) ヨリ

$$\sigma_0+\mathrm{T}-\sigma_0\frac{r^2+r_1^2}{r^2-r_1^2}=\sigma_a-c\,\frac{r_1^2}{r^2}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{T}=\sigma_a-c\,\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{2\sigma_0 r_1^2}{r^2-r_1^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

是ニヨリ σ_0 ヲ與フレバ T ヲ得ベシ、

(9·24) ト (d) トニヨリ

$$\frac{d\sigma_0}{dr}=c\,\frac{r_1^2}{r^3}-\frac{\sigma_a}{r}$$

$$\therefore \qquad \sigma_0=-\frac{cr_1^2}{2r^2}-\sigma_a\log_e r+\mathrm{A}$$

但シ A ハ常數ナリ、

$r=r_3$ ナルトキ $\sigma_0=0$

$$\therefore \qquad \mathrm{A}=\frac{cr_1^2}{2r_3^2}+\sigma_a\log_e r_3$$

$$\therefore \qquad \sigma_0=\frac{cr_1^2}{2}\left(\frac{1}{r_3^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\sigma_a\log_e\frac{r_3}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (f)$$

$r=r_2$ ナルトキノ σ_0 ヲ σ_2 トスレバ

$$\sigma_2=\frac{cr_1^2}{2}\left(\frac{1}{r_3^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)+\sigma_a\log_e\frac{r_3}{r_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (g)$$

$r=r_1$, 即チ管ノ內側ニ於テ此ノ壓力 σ_2 ハ

$$-\frac{2\sigma_2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}$$

ナル箍張內力ヲ生ズ. コレハ即チ管ノ內面ニ於ケル初ノ箍張內力ニシテ鋼條ヲ捲キシタメニ生ゼシモノナリ、又此ノ點ニ於ケル初ノ半徑方向ノ內力ハ零ニシテ, 爆發ノタメニ起ル所ノ $\sigma_1+\sigma_{t_1}$ ハ (b) ニヨリテ c ナリ、故ニ管ノ內面ニ於ケル $\sigma+\sigma_t$ ノ結局ノ値ハ

$$c-\frac{2\sigma_2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}$$

是ガ σ_a ニ等シカラザル可ラザルヲ以テ

$$\frac{2\sigma_2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}=c-\sigma_a$$

$$\therefore \qquad \sigma_2=\frac{r_2^2-r_1^2}{2r_2^2}(c-\sigma_a)$$

(g) ニヨリ

$$\frac{r_2^2-r_1^2}{2r_2^2}(c-\sigma_a)=\frac{cr_1^2}{2r_2^2r_3^2}(r_2^2-r_3^2)+\sigma_a\log_e\frac{r_3}{r_2}$$

c ノ値ヲ式 (c) ヨリ得テ此ノ式ハ次ノ如クナル、

$$\log_e\frac{r_3}{r_2}=\frac{\mathrm{P}}{\sigma_a}-\frac{r_2^2-r_1^2}{2r_2^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot26)$$

此ノ式ニヨリ r_3 ヲ得ベシ、

次ニ (e) ト (f) トヨリ σ_0 ヲ消去スレバ

$$\mathrm{T}=\sigma_a-c\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{2r_1^2}{r^2-r_1^2}\left\{\frac{cr_1^2}{2}\left(\frac{r^2-r_3^2}{r_3^2r^2}\right)+\sigma_a\log_e\frac{r_3}{r}\right\}$$

$$=\sigma_a\left(1+\frac{2r_1^2}{r^2-r_1^2}\log_e\frac{r_3}{r}\right)+c\left(\frac{r_1^4(r^2-r_3^2)}{r^2r_3^2(r^2-r_1^2)}-\frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

c ノ値ヲ (c) ヨリ得テ

$$\mathrm{T}=\sigma_a\left(1+\frac{2r_1^2}{r^2-r_1^2}\log_e\frac{r_3}{r}\right)-\frac{2\mathrm{P}r_1^2}{r^2-r_1^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot27)$$

(9・26) ニヨリ r_3 ガ與ヘラレ, (9・27) ニヨリ T ヲ得、

又 $r=r_2$ ニ於テハ

$$\mathrm{T}=\sigma_a\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$$

$r=r_3$ ニ於テハ

$$\mathrm{T}=\sigma_a-\frac{2\mathrm{P}r_1^2}{r_3^2-r_1^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot28)$$

(ii) 管ニテハ剪斷内力一定,捲線ニテハ引張内力一定ノ場合、

管ニテハ

$$\sigma+\sigma_t \ngtr a$$

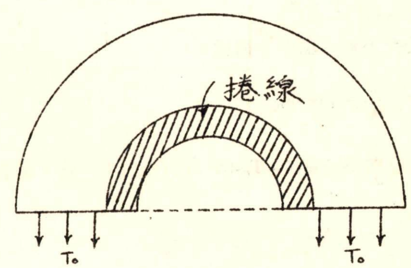
捲線ニテハ

$$\sigma_t=\text{常數}=\mathrm{T}_0$$

前ノ場合ト同様ニ σ_2 ヲ管ト捲線トノ間ノ壓力トス、第 155 圖ニヨリ

$$2r_2\sigma_2=2\mathrm{T}_0(r_3-r_2),$$

$$\sigma_2=\frac{\mathrm{T}_0(r_3-r_2)}{r_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot29)$$



第155図

$r=r_1$, 即チ管ノ内面ニ於テ

$$\sigma+\sigma_t=\frac{2(P-\sigma_2)r_2^2}{r_2^2-r_1^2}$$

(9·29) ニヨリ

$$\sigma+\sigma_t=\frac{2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(P-\frac{r_3-r_2}{r_2}T_0\right)$$

$$\therefore\qquad \frac{2r_2^2P}{r_2^2-r_1^2}-\frac{2r_2(r_3-r_2)}{r_2^2-r_1^2}T_0=\sigma_a$$

$$r_3=\frac{2r_2^2(P+T_0)-\sigma_a(r_2^2-r_1^2)}{2r_2T_0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot30)$$

(9·30) ニヨリ r_3 ヲ得ベシ、全體ヲ均等質ト考ヘテ爆發ニヨル捲線内ノ箍張内力 $\sigma_{t'1}$ ヲ求ムレバ

$$\sigma_{t'1}=\frac{Pr_1^2}{r_3^2-r_1^2}\left(\frac{r_3^2}{r^2}+1\right)$$

結局ノ引張力ハ T_0 ナルヲ以テ半徑 r ニ於ケル初ノ引張内力 $\sigma_{t'0}$ ハ

$$\sigma_{t'0}=T_0-\sigma_{t'1}=T_0-\frac{Pr_1^2}{r_3^2-r_1^2}\left(\frac{r_3^2}{r^2}+1\right)$$

$$\sigma_{t'0}=T_0-c'\left(\frac{r_3^2}{r^2}+1\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(a)'$$

但シ
$$c'=\frac{Pr_1^2}{r_3^2-r^2{}_1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(b)'$$

爆發ノ前捲線ニ於テハ前ノ場合ト同樣ニ

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_0)+\sigma_{t'0}=0$$

$$\therefore\qquad \frac{d}{dr}(r\sigma_0)=c'-T_0+c'\frac{r_3^2}{r^2}$$

$$\therefore\qquad r\sigma_0=A+c'r-T_0r-c'\frac{r_3^2}{r}$$

$$\therefore\qquad r\sigma_0=A+c'r-c'\frac{r_3^2}{r}$$

但シ A ハ常數ナリ、故ニ

$$\sigma_0=\frac{A}{r}-T_0+c'\left(1-\frac{r_3^2}{r^2}\right)$$

$r=r_3$ ナルトキ $\sigma_0=0$

$$\therefore \qquad A = r_3 T_0$$

$$\therefore \qquad \sigma_0 = T_0\left(\frac{r_3}{r} - 1\right) + c'\left(1 - \frac{r_3^2}{r_2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9\cdot31)$$

半徑 r ニ於ケル初ノ箍張內力ハ (9·25) ヨリ

$$\sigma_{t,0} = T - \sigma_0 \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 - r_1^2}$$

但シ T ハ捲線ノ引張內力ナリ、(9·31) ニヨリ

$$T = \sigma_{t,0} + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 - r_1^2}\left\{T_0\left(\frac{r_3}{r} - 1\right) + c'\left(1 - \frac{r_3^2}{r^2}\right)\right\}$$

又 $(a)'$ ニヨリ

$$T = T_0 - c'\left(\frac{r_3^2}{r^2} + 1\right) + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 - r_1^2}\left\{T_0\left(\frac{r_3}{r} - 1\right) + c'\left(1 - \frac{r_3^2}{r^2}\right)\right\}$$

更ニ此ノ式ハ次ノ形トナル、

$$(r^2 - r_1^2)T = T_0\left\{\frac{r_3}{r}(r^2 + r_1^2) - 2r_1^2\right\} - 2c'(r_3^2 - r_1^2)$$

(b') ニ與ヘタル c' ノ値ト (9·30) ノ r_3 ノ値ヲ入レテ

$$T = \frac{P + T_0}{r^2 - r_1^2}\left\{\frac{r_2}{r}(r^2 + r_1^2) - 2r_1^2\right\} - \frac{(r_2^2 - r_1^2)(r^2 + r_1^2)}{2rr_2(r^2 - r_1^2)} \cdots\cdots (9\cdot32)$$

(iii) 一定ナル引張力ニテ捲カレタル場合、

鋼條ニ一定ノ引張力ヲ與ヘテ捲カレタル場合ヲ考フ、其ノ一定ノ引張力ノ强サヲ T トス、(9·25) ノ式ニヨリ

$$T - \sigma_{t,0} = \sigma_0 \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 - r_1^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)''$$

$\sigma_{t,0}$ 及 σ_0 ハ爆發ノ前任意ノ半徑 r ノ位置ニ於ケル箍張內力及半徑方向ノ內方ナリ、(9·24) ヨリ

$$\sigma_0 + r\frac{d\sigma_0}{dr} = -\sigma_{t,0} = \sigma_0 \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 - r_1^2} - T$$

$$\therefore \qquad \frac{d\sigma_0}{dr} + \sigma_0\left\{\frac{-2r_1^2}{(r^2 - r_1^2)r}\right\} = -\frac{T}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)''$$

積分因數ハ

$$e^{\int \frac{-2r_1^2 dr}{(r^2 - r_1^2)r}} = \frac{r^2}{r^2 - r_1^2}$$

是ニ由テ

$$\frac{r^2}{r^2-r_1^2}\frac{d\sigma_0}{dr}-\frac{2r^2r_1^2}{(r^2-r_1^2)^2r}\sigma_0=-\frac{rT}{r^2-r_1^2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\sigma_0}{r^2-r_1^2}\right)=-\frac{rT}{r^2-r_1^2}$$

$$\therefore \quad \frac{r^2\sigma_0}{r^2-r_1^2}=-\frac{T}{2}\log_e(r^2-r_1^2)+A$$

$r=r_3$, $\sigma_0=0$

$$\therefore \quad A=\frac{T}{2}\log_e(r_3^2-r_1^2)$$

$$\therefore \quad \frac{r^2\sigma_0}{r^2-r_1^2}=\frac{T}{2}\log_e\frac{r_3^2-r_1^2}{r^2-r_1^2}$$

$$\therefore \quad \sigma_0=\frac{(r^2-r_1^2)T}{2r^2}\log_e\frac{r_3^2-r_1^2}{r^2-r_1^2} \quad \cdots\cdots\cdots (9\cdot33)$$

$(a)''$ ニヨリ

$$\sigma_{t_0}=T\left(1-\frac{r^2+r_1^2}{2r^2}\log_e\frac{r_3^2-r_1^2}{r^2-r_1^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (9\cdot34)$$

(9・33), (9・34) ニヨリ捲線ニ於ケル初ノ內力ヲ得ベシ，管ノ表面ニ於テハ (9・33) ニヨリ，$r=r_2$ ト置キテ

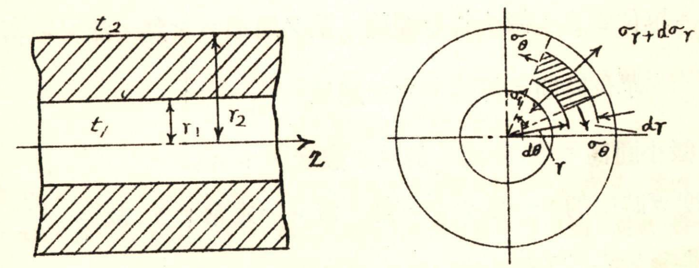
$$\sigma_2=\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2r_2^2}T\log_e\frac{r_3^2-r_1^2}{r_2^2-r_1^2}$$

管ノ內面ニ於テ $\sigma_1=0$, 故ニ管ニ於ケル初ノ內力ハ第八六節 (9・8) ニヨリテ定ムルコトヲ得、爆發ノ壓力 P ニ基ヅクモノハ第八六節 (9・9) ニ於テ $p_1=P$, $p_2=0$, $r_2=r_3$ ト置キテ求メ得ベシ、而シテ結局ノ內力ハ是等兩者ヲ加ヘタルモノナリ、

(9・34) ニヨリ知ラルル如ク r ガ減ジテ r_2 ニナルトキ，σ_{t_0} ハ $r=r_3$ ナル外周ニ於ケル値ヨリ次第ニ減ズベシ、然ルニ爆發ニヨルモノハ r ガ減ズルニ從ヒ次第ニ增加ス、此クノ如クニシテ捲線ニ於ケル纏張內力ノ分布ノ不平均ガ減ゼラルルコトトナルベシ、

九〇、厚キ管ニ於ケル熱內力、

內面及外面ガ夫々一定溫度 t_1, t_2 ニ保タルル場合ニ於ケル厚キ斷面圓形ノ管ニ起ル內力ヲ考フ（第 156 圖）、



第156図

端面ノ條件トシテハ，軸方向ノ歪ミガ一定ナルコト及管ニハ外力ガ働カザルコトト假定ス、

r_1, r_2…………內半徑及外半徑

λ…………熱傳導率

a…………線膨脹係數

t…………半徑 r ノ所ニ於ケル溫度、

u…………最初半徑 r ノ所ニアリシ點ノ半徑方向ノ變位

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$…………半徑，周圍及軸方向ノ內力、

上記ノ凡テノ量ハ θ 及 z ニハ無關係トス、

先ヅ第一ニ t ヲ r ノ函數トシテ表ハサントス、今厚サ δr，軸方向ニ單位長サノ微小管狀圓筒ノ壁ヲ通過スル熱ノ流レハ

$$單位時間ニ傳導サルル熱量=\lambda\frac{\delta t}{\delta r}\cdot 2\pi r$$

δt ハ微小圓筒ノ內，外面ニ於ケル溫度差トス、

溫度ガ時間的ニ一定ナラバ熱ノ流レハ定常ナリ、故ニ $r\frac{dt}{dr}$ ハ一定ナルベキナルヲ以テ

$$r\frac{dt}{dr}=\mathrm{A}$$

從ツテ

$$t=\mathrm{A}\log_e r+\mathrm{B} \quad \text{(i)}$$

$r=r_1$ 及 r_2 ニ於テ夫々 $t=t_1$ 及 t_2 トスレバ

$$t_1=\mathrm{A}\log_e r_1+\mathrm{B}$$

$$t_2=\mathrm{A}\log_e r_2+\mathrm{B}$$

コレヨリ A 及 B ヲ求ムルコトヲ得，從ツテ結局

応力ニヨル應力ト熱ニヨル應力トノ代数和ガ
全体ノ應力トナル、

$$t=\frac{t_1\log_e\dfrac{r}{r_2}+t_2\log_e\dfrac{r_1}{r}}{\log_e\dfrac{r_1}{r_2}} \quad\text{..........}\ (9\cdot35)$$

内力ノタメニ起ル歪ミト,熱ニヨル歪ミトヲ區別スルヲ要ス、後者ハ凡テノ方向ニ αt ナリ、

結局ノ歪ミハ半徑,周圍及軸方向ニ夫々 $\dfrac{du}{dr}$, $\dfrac{u}{r}$ 及 ε_z ナリ、從ツテ内力ニ基ク歪ミハ $\dfrac{du}{dr}-\alpha t$, $\dfrac{u}{r}-\alpha t$ 及 $\varepsilon_z-\alpha t$ ナリ、從ツテ内力ト歪ミトノ關係式ハ

stress=関係スルモノ

$$E\left(\frac{du}{dr}-\alpha t\right)=\sigma_r-\frac{1}{m}(\sigma_\theta+\sigma_z) \quad\text{............}\ (ii)$$

$$E\left(\frac{u}{r}-\alpha t\right)=\sigma_\theta-\frac{1}{m}(\sigma_z+\sigma_r) \quad\text{............}\ (iii)$$

$$E(\varepsilon_z-\alpha t)=\sigma_z-\frac{1}{m}(\sigma_r+\sigma_\theta) \quad\text{..................}\ (iv)$$

又平衡ノ關係式ハ

$$\sigma_r-\sigma_\theta+r\frac{d\sigma_r}{dr}=0 \quad\text{..............................}\ (v)$$

(iii) ヨリ

$$Eu=E\alpha rt+r\sigma_\theta-\frac{\sigma_z}{m}r-\frac{\sigma_r}{m}r$$

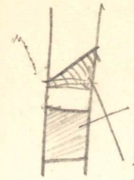
r ニツキ微分シテ

$$E\frac{du}{dr}=E\alpha t+E\alpha r\frac{dt}{dr}+\sigma_\theta+r\frac{d\sigma_\theta}{dr}$$
$$-\frac{\sigma_z}{m}-\frac{r}{m}\frac{d\sigma_z}{dr}-\frac{\sigma_r}{m}-\frac{r}{m}\frac{d\sigma_r}{dr} \quad\text{......}\ (vi)$$

又 (ii) ヨリ

$$E\frac{du}{dr}=E\alpha t+\sigma_r-\frac{\sigma_\theta}{m}-\frac{\sigma_z}{m} \quad\text{........................}\ (vii)$$

$t_2 < t_1$



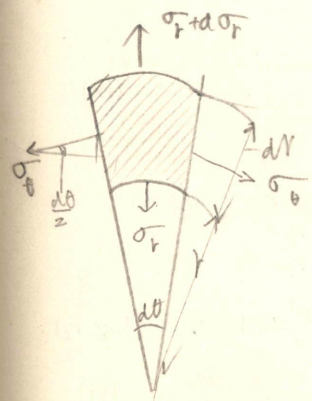
熱ニヨル歪ミトハ単ナル膨脹デ stress ニハ無関係ナリ.
熱ノ温度差ニヨリ内外伸ビガ異リ ソノ為ニ起ル歪ミハ変易ナモノデアル. stress ニ関係スル.

$r \to r+u$. ニ変ル

$r+dr \to r+dr+u+du$. ニ変ルスレバ

$$\varepsilon_r=\frac{dr+du-dr}{dr}=\frac{du}{dr}$$
$$\varepsilon_\theta=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{u}{r}$$
$$\varepsilon_z=\text{const}$$

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left\{\sigma_1-\frac{1}{m}(\sigma_2+\sigma_3)\right\}$$
$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left\{\sigma_2-\frac{1}{m}(\sigma_3+\sigma_1)\right\}$$
$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left\{\sigma_3-\frac{1}{m}(\sigma_1+\sigma_3)\right\}$$



$$(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)d\theta\cdot dz$$
$$-\sigma_r\cdot r\,d\theta\cdot dz-2\sigma_\theta\cdot\sin\frac{d\theta}{2}\cdot dz\cdot dr=0$$
(微小ノ項=0, $\sin\frac{d\theta}{2}\fallingdotseq\frac{d\theta}{2}$.)

(iv) ヲ r ニ就テ微分シテ, ε_z ハ假定ニヨリ一定ナルヲ以テ,

$$\frac{d\sigma_z}{dr}=-\mathrm{E}\alpha\frac{dt}{dr}+\frac{1}{m}\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{1}{m}\frac{d\sigma_\theta}{dr} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(viii)}$$

(vi) ヨリ (vii) ヲ引キ, (viii) カラ $\frac{d\sigma_z}{dr}$ ヲ置キカヘテ整頓スレバ

$$\sigma_r-\sigma_\theta-r\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{d\sigma_\theta}{dr}+\frac{r}{m}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr}=\mathrm{E}\alpha r\frac{dt}{dr}$$

(v) ヨリ $\sigma_r-\sigma_\theta$ ヲ置キカヘテ

$$r\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{d}{dr}(\sigma_r+\sigma_\theta)+\mathrm{E}\alpha r\frac{dt}{dr}=0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dr}(\sigma_r+\sigma_\theta)+\frac{m\mathrm{E}\alpha}{m-1}\cdot\frac{dt}{dr}=0$$

$$\therefore \quad \sigma_r+\sigma_\theta+\frac{m\mathrm{E}\alpha}{m-1}t=c,\ \text{一定}$$

(v) ニ加ヘテ

$$2\sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{m\mathrm{E}\alpha}{m-1}t=c$$

或ハ

trヲ積分スルトキハ加ル

cr

$$\cancel{\frac{1}{r}}\frac{d}{dr}(r^2\sigma_r)=c-\frac{m\mathrm{E}\alpha}{m-1}t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ix)}$$

(9・35) ヨリ　両辺ニrヲカケル.

$$rt=\frac{r(t_1-t_2)\log_e r+r(t_2\log_e r_1-t_1\log_e r_2)}{\log_e\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\therefore \quad \int rtdr=\frac{\frac{r^2}{2}(t_1-t_2)\left(\log_e r-\frac{1}{2}\right)+\frac{r^2}{2}(t_2\log_e r_1-t_1\log_e r_2)}{\log_e\frac{r_1}{r_2}}$$

$$=\frac{r^2t}{2}-\frac{r^2(t_1-t_2)}{4\log_e\frac{r_1}{r_2}}$$

從ツテ, (ix) ヲ積分シテ

$$r^2\sigma_r=\frac{cr^2}{2}-\frac{mE\alpha}{m-1}\left\{\frac{r^2t}{2}-\frac{r^2(t_1-t_2)}{4\log_e\frac{r_1}{r_2}}\right\}+\beta,$$ 但シ β ハ常數

從ツテ

$$\sigma_r=\left\{\frac{c}{2}+\frac{mE\alpha(t_1-t_2)}{4(m-1)\log_e\frac{r_1}{r_2}}\right\}+\frac{\beta}{r_2}-\frac{mE\alpha}{2(m-1)}t$$

或ハ

$$\sigma_r=A+\frac{B}{r^2}-\frac{mE\alpha}{2(m-1)}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(x)}$$

管ノ面ニ何ラ外壓ハ働カザルヲ以テ $r=r_1$ 或ハ r_2 ニ於テ $\sigma_r=0$,

故ニ

$$A+\frac{B}{r_1^2}-\frac{mE\alpha}{2(m-1)}t_1=0$$

$$A+\frac{B}{r_2^2}-\frac{mE\alpha}{2(m-1)}t_2=0$$

コレヨリ

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\cdot\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\\ B&=\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\cdot\frac{r_1^2r_2^2(t_1-t_2)}{r_2^2-r_1^2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(xi)}$$

更ニ (v) 及 (x) ヨリ

$$\sigma_\theta=\sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$=A+\frac{B}{r^2}-\frac{2B}{r^2}-\frac{mE\alpha}{2(m-1)}t-\frac{mE\alpha r}{2(m-1)}\cdot\frac{dt}{dr}$$

$$=A-\frac{B}{r^2}-\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\left(t+\frac{t_1-t_2}{\log_e\frac{r_1}{r_2}}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(xii)}$$

(x) 及 (xii) ニ A 及 B ヲ置キカヘテ

$$\boxed{\sigma_r=\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\left\{\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}(t_1-t_2)}{r_2^2-r_1^2}-t\right\}}\cdots(9\cdot36)$$

$$\boxed{\sigma_\theta=\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\left\{\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}(t_1-t_2)}{r_2^2-r_1^2}-\frac{t_1-t_2}{\log_e\frac{r_1}{r_2}}-t\right\}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot37)$$

但シ t ハ (9·35) ニヨリ與ヘラル、

次ニ σ_z ヲ求ム、(iv) ヨリ

$$\sigma_z=E(\varepsilon_z-\alpha t)+\frac{1}{m}(\sigma_r+\sigma_\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}'$$

コノ式ヲ用ヒテ σ_z ヲ求ムルニ際シ兩端ノ條件ヲ入レザルベカラズ、次ニコレヲ考フ、

(1) 兩端固定、

(iv)′ ニ $\varepsilon_z=0$ ト置キテ

$$\sigma_z=-E\alpha t+\frac{1}{m}(\sigma_r+\sigma_\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9\cdot38)$$

コレニ (9·36), (9·37) ノ σ_r 及 σ_θ ノ値ヲ置キテ整頓スレバ

$$\boxed{\sigma_z=\frac{mE\alpha}{m-1}\left\{\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2}{m(r_2^2-r_1^2)}-\frac{t_1-t_2}{2m\log_e\frac{r_1}{r_2}}-t\right\}}\cdots\cdots(9\cdot39)$$

但シ t ハ (9·35) ニヨリ與ヘラル、

r_1, r_2 …… 内半径及外半径.

λ …… 熱傳導率.　α : 線膨脹係數.

t …… 半径 r ニ於ケル温度.

t_1 …… r_1 ニ於ケル温度.

t_2 …… r_2 ニ …………….

σ_r …… 半径方向. σ_θ : 周圍方向. σ_z : 軸方向ノ内力.

$$t=\frac{t_1\log_e\frac{r}{r_2}+t_2\log_e\frac{r_1}{r}}{\log_e\frac{r_1}{r_2}}\quad ---[9.35]$$

$$\sigma_r=\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\left\{\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}(t_1-t_2)}{r_2^2-r_1^2}-t\right\}$$

$$\sigma_\theta=\frac{mE\alpha}{2(m-1)}\left\{\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}(t_1-t_2)}{r_2^2-r_1^2}-\frac{t_1-t_2}{\log_e\frac{r_1}{r_2}}-t\right\}$$

(1) 兩端固定

$$\sigma_z=\frac{mE\alpha}{m-1}\left\{\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2}{m(r_2^2-r_1^2)}-\frac{t_1-t_2}{2m\log_e\frac{r_1}{r_2}}-t\right\}$$

(2) 兩端支持 ($\varepsilon_z=0$. $\varepsilon_\theta\neq0$).

$$\sigma_z=\frac{mE\alpha}{m-1}\left\{\frac{r_2^2t_2-r_1^2t_1}{r_2^2-r_1^2}-\frac{t_1-t_2}{2\log_e\frac{r_1}{r_2}}-t\right\}$$

(2) 兩端自由、

コノ場合ニハ次ノ條件ガ成立セザルベカラズ、

$$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r\sigma_z dr = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(xiii)}$$

假定ニヨリ軸方向ノ歪ミ ε_z ガ一定ナルガ、コレガ零ナルトキト然ラザル場合トニ分チテ考フ、先ヅ $\varepsilon_z=0$ ナルトキハ σ_z ハ (9·38) ナルヲ以テ (x), (xii) ノ σ_r 及 σ_θ ノ値ヲ置ケバ

$$\sigma_z = \underbrace{\frac{2A}{m} - \frac{E\alpha}{2(m-1)} \cdot \frac{t_1-t_2}{\log_e \frac{r_1}{r_2}}}_{D} - \frac{mE\alpha}{m-1}t$$

コノ最初ノ二項ハ一定ナルヲ以テ, 簡單ノタメニ次ノ如ク書ク、

$$\sigma_z = D - \frac{mE\alpha}{m-1}t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(xiv)}$$

從ツテ (xiii) ヨリ次ノ如クナルベシ、

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2}\left(Dr - \frac{mE\alpha}{m-1}rt\right)dr = 0$$

或ハ

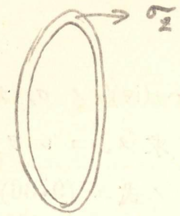
$$\frac{D}{2}(r_2^2 - r_1^2) = \frac{mE\alpha}{m-1}\left\{\frac{r_2^2 t_2 - r_1^2 t_1}{2} - \frac{(r_2^2-r_1^2)(t_1-t_2)}{4\log_e \frac{r_1}{r_2}}\right\}$$

但シ $\int rtdr$ ノ値ヲ用ヒタリ、

$$\therefore \quad D = \frac{mE\alpha}{m-1}\left(\frac{r_2^2 t_2 - r_1^2 t_1}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{t_1-t_2}{2\log_e \frac{r_1}{r_2}}\right)$$

從ツテ (xiv) ヨリ

$$\boxed{\sigma_z = \frac{mE\alpha}{m-1}\left(\frac{r_2^2 t_2 - r_1^2 t_1}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{t_1-t_2}{2\log_e \frac{r_1}{r_2}} - t\right) \quad \ldots\ldots \text{(9·40)}}$$



(xiii)
軸方向ニハ力ガ無イト云フ意味

但シ t ハ (9・35) ニヨリ與ヘラル、

次ニ兩端自由ニシテ $\varepsilon_z \neq 0$ ナルトキハ (iv)′ ノ σ_z ガ兩端自由ノ條件 (xiii) ヲ滿足スル如キ ε_z ノ値ヲ求メ、コレヲ用フレバ (iv)′ ガ求ムル σ_z ヲ與フ、而シテコノ σ_z ノ式ニ (9・36), (9・37) ノ σ_r 及 σ_θ ノ値ヲ置ケバ (9・40) ト同一ノ結果ヲ得、

式 (9・35), (9・36), (9・37), (9・39) 及 (9・40) ガ所要ノ結果ナリ、

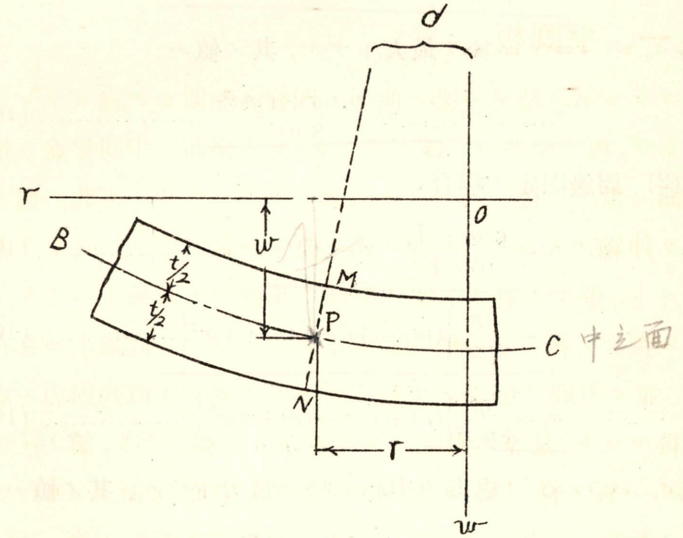
第一〇章

平板ノ强サ

九一、平圓板、

ココニ示ス結果ハ梁ノ曲ゲノ理論ニ類似シテ論ゼラレタルモノニシテ, (1)板ノ厚サハ一様ナリトシ, ソノ兩面ノ中間半途ニ横ハレル平面ハ歪ミノ後ニハ一ツノ曲面トナルモノナルガ此(2)ノ面ハ歪ミニヨリ伸縮ナキコト, (3)中間ノ面ノ撓ミハ板ノ厚サニ比シテ甚ダ小ナルコト, (4)歪ミノ前ニ中間ノ平面ニ垂直ナル直線上ニアリシ總テノ點ハ歪ミノ後ニハ中間曲面ニ垂直ナル一ツノ直線上ニ存在スルコト, 並(5)ニ中間ノ平面ニ平行ナル平面ヲ過ギル直角内力ハ之ヲ無視シ得ルコト, 是等ノ假定ノ下ニ成立スルモノナリ、第 157 圖ニ於テ OO′ ハ板ノ軸, BC ハ歪ミヲ受ケタル中間曲面ヲ OO′ ヲ含ム任意ノ平面ニテ截リタルモノ, O ハ原點即チ歪ミノ前ニ板ノ軸ガ中間ノ平面ニ會スル點ナリ、

今半徑 a, 厚サ t ナル圓板ガ全面ニ p ナル一様ニ分布セル負荷ヲ有スル場合ニ就テ考フ、w ヲ半徑 r ノ所ニ於ケル BC 上ノ點 P ノ撓ミ, σ_r 及 σ_θ ハ夫々板ノ表面上ノ點 N (又ハ M, コノ場合ハコレラノ内力ノ符號ハ N 點ノソレトハ逆) ニ於ケル半徑方向及周方向ノ直接内力トスレバ (M, N ハ P ヲ通ズル法線上



苐157図

ノ點ナリ), 周邊支持ノ狀態ニヨリ夫々次ノ結果ヲ求ムルコトヲ得、

(1) 周邊支持ノ場合、

$$w=\frac{3p(m^2-1)}{16m^2Et^3}(a^2-r^2)\left(\frac{5m+1}{m+1}a^2-r^2\right) \quad\text{......}\ (10\cdot1)$$

$$\sigma_r=\frac{3(3m+1)p}{8mt^2}(a^2-r^2) \quad\text{......}\ (10\cdot2)$$

$$\sigma_\theta=\frac{3p}{8mt^2}\left\{(3m+1)a^2-(m+3)r^2\right\} \quad\text{......}\ (10\cdot3)$$

σ_r, σ_θ ハ $r=0$ ニ於テ最大トナル, 其ノ値ハ

$$\sigma_{r,\max.}=\sigma_{\theta,\max.}=\frac{3(3m+1)pa^2}{8mt^2} \quad\text{......}\ (10\cdot4)$$

(2) 周邊固定ノ場合、

$$w=\frac{3(m^2-1)p}{16m^2Et^3}(a^2-r^2)^2 \quad\text{......}\ (10\cdot5)$$

$$\sigma_r=\frac{3p}{8mt^2}\left\{(m+1)a^2-(3m+1)r^2\right\} \quad\text{......}\ (10\cdot6)$$

$$\sigma_\theta=\frac{3p}{8mt^2}\left\{(m+1)a^2-(m+3)r^2\right\} \quad\text{......}\ (10\cdot7)$$

σ_r, σ_θ ハ $r=0$ ノ處即チ中心ニ於テ最大トナル、其ノ値ハ

$$(\sigma_r)_{r=0}=(\sigma_\theta)_{r=0}=\frac{3(m+1)pa^2}{8mt^2} \quad\text{......}\ (10\cdot8)$$

而シテ絕對値ノ最大ナルモノハ $r=a$ ノ處即チ周邊ニ於テ起ル、即チ

$m=\frac{10}{3}$ トスルト

$$(\sigma_r)_{r=a}=-\frac{3pa^2}{4t^2} \quad\text{......}\ (10\cdot9)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=a}=-\frac{3pa^2}{4mt^2} \quad\text{......}\ (10\cdot10)$$

a：半径。 p：圧力。
t：厚サ。
w：半径 r ノ所ニ於ケル BC 上ノ一点 p ノ撓ミ。
σ_r：表面上ノ点 N(表面) 又ハ M(裏面 負号) ニ於ケル半径方向
σ_θ：— — — — — — — 周方向ノ内力。

$$|(\sigma_r)_{r=a}| > (\sigma_r)_{r=0}\ (\sigma_\theta)_{r=0} > |(\sigma_\theta)_{r=a}|$$

即チ中心ニ於ケル圓板ノ下表面ノ主內力ハ正ニシテ，外周ニ於テハ負トナル、而シテ主內力ノ絕對値ハ外周ニ於ケル σ_r ノ値ガ最大ナリ、

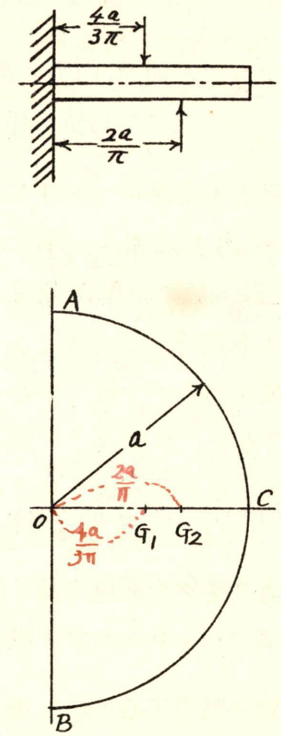
九二、平板ノ近似的解、

次ニ述ブル略算法ニヨリ對稱形ノ平板ニ於ケル最大曲ゲ內力ヲ對稱軸ニ垂直ナル平均ノ曲ゲ內力ヨリ概算スルコトヲ得．結果ニハ實驗或ハ前節ニ於テナシタル圓板ノ嚴密ナル吟味ヨリ決定サルベキ係數ヲ乘ズル、コノ方法ハ對稱軸ノ一方ノ側ニ於ケル荷重及支點反力ニヨル所ノ，對稱軸ヲ含ム平面ニヨル斷面ニ於ケル，曲ゲ「モーメント」ヲ見出スニアリ、從ツテ周邊支持ノ場合ニ適用サルルモノニシテ周邊固定ノ場合ニハ不可トス、然レドモ前節ノ如ク，平板ノ場合ニ於テハ，內力及歪ミハ單ナル周邊支持ノ場合ニ於テ最大ナリ、而シテ實際ニ於テハ周邊固定モ單ナル周邊支持ノ場合ニ起ル僅少ノ傾キヲ全然許サザルモノトハ期待シ得ズ、單ナル周邊支持板ニ於テハ最大內力ハ一般ニ中心ニ於テ起リ，周邊固定板ハ一般ニ周邊ニ於テ起ル、不完全ナル固定ハ支持端ニ於ケル傾キヲ或ル程度許シテ板ノ中央及周邊ニ於ケル內力ヲ等シカラシムルニ至ルベシ，カクシテ平板ノ最大强サヲ實現スルモノナリ、

(1) 一樣ナル壓力ヲ受クル周邊支持ノ圓板、

半圓板 ACB ヲ考フ，コレニカカル壓力ハ $\frac{\pi a^2}{2}p$ ニシテ全壓力ハ $OG_1=\frac{4a}{3\pi}$ ナル如キ壓力中心 G_1 ニ働ク、周邊 ACB ニ於ケル反力モ亦 $\frac{\pi a^2}{2}p$ ニシテソノ作用中心ハ O ヨリ $\frac{2a}{\pi}$ ナル G_2 ナリ、從ツテ荷重及反力ニヨル斷面 AOB ニ關スル結局ノ曲ゲ「モーメ

平板ノ近似的解法
周辺支持ノ場合ニノミ適應サル.



第158図

ント」ハ

$$M=\frac{\pi a^2}{2}p\left(\frac{2a}{\pi}-\frac{4a}{3\pi}\right)=\frac{pa^3}{3}$$

斷面 AOB ノ表面ニ於ケル, AB ニ垂直ナル方向ノ, 曲ゲ内力ノ平均値ハ曲ゲ「モーメント」ヲ AB ノ斷面係數 $\frac{1}{6}\cdot 2a\cdot t^2$ 即チ $\frac{1}{3}at^2$ ニテ割リテ得ラル、即チ

$$\sigma=\frac{\frac{pa^3}{3}}{\frac{1}{3}at^2}=p\frac{a^2}{t^2} \quad \text{......} \quad (10\cdot 11)$$

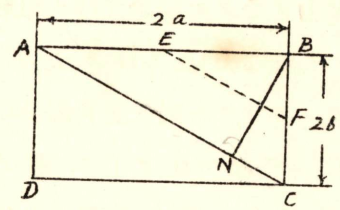
然ルニ前節ヨリ明ラカナル如ク, 内力ノ最大値ナル中心 O ニ於ケル値ヲ與フルタメニハ上記ノ平均値ニ係數 $\frac{3}{8}\cdot\frac{3m+1}{m}$ ヲ乘ズルヲ要シ, $m=\frac{10}{3}$ トスレバ $1{\cdot}24p\frac{a^2}{t^2}$ トナル、

(2) 一様ナル壓力ヲ受クル周邊支持ノ矩形板、

矩形 ABCD ノ二邊 AB 及 CD ヲ夫々 $2a$ 及 $2b$ トス、二邊ガ極メテ近キ大サニアラザル限リ對角線 AC ニ對スル内力ガ最大ナリ、B ヨリ AC ニ垂線 NB ヲ下ス、邊 AB 及 BC ニ於ケル反力ハ各邊ノ中點 E 及 F ニ働キ, 矩形ノ半分ナル ABC ノ合反力ハ直線 EF 上ニ作用シ AC ヨリ $\frac{1}{2}$BN ノ距離ニアリ、三角形 ABC ノ壓力ノ中心ハ圖形ノ重心ニシテ AC ヨリ $\frac{1}{3}$BN ノ距離ナリ、壓力及反力ノ大サハ $2a\cdot b\cdot p$ ナリ, 從ツテ AC ニ關スル曲ゲ「モーメント」ハ

$$M=2abp\left(\frac{1}{2}BN-\frac{1}{3}BN\right)=\frac{1}{3}abp\cdot BN$$

而シテ



第159図

$$\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \quad \text{或ハ} \quad \mathrm{BN}=\frac{4ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}=2\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

斷面 AC ノ斷面係數 W ハ

$$\mathrm{W}=\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{a^2+b^2}\cdot t^2=\frac{t^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}$$

從ツテ斷面 AC ノ曲ゲ內力ノ平均值ハ

$$\sigma=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot p}{\frac{t^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a^2}{a^2+b^2}\cdot p\cdot\frac{b^2}{t^2} \quad \ldots\ldots (10\cdot 12)$$

$\frac{a}{b}$ ノ大ナル極メテ長キ矩形ニ對シテハ上式ハ

$$2p\frac{b^2}{t^2}$$

ニ近付ク、

章一一章

回轉體ノ强サ

九三、回轉環ニ起ル内力、

第 160 圖ニ於テ，PQ ハ O ヲ通ジ紙面ニ垂直ナル軸ヲ回轉軸トシテ回轉セル環(Ring)ノ一部ナリ、環ノ半徑ヲ r トシ，PQ ニ對スル中心角ヲ $\delta\theta$ トス、單位容積ニツキテノ材料ノ重量ヲ w トシ，回轉軸ヲ通ズル平面ニヨル環ノ截斷面積ヲ S トス、角速度ヲ ω トス、

PQ ガ回轉スルニ必要ナル求心力ハ之ニ隣接セル環ノ部分ヨリ作用スル所ノ引張力 T ニヨリテ生ズ、遠心力ヲ F トス、

$$F=\frac{wSr\delta\theta}{g}r\omega^2$$

第 160 圖ヲ參照シテ

$\delta\theta \fallingdotseq \theta$

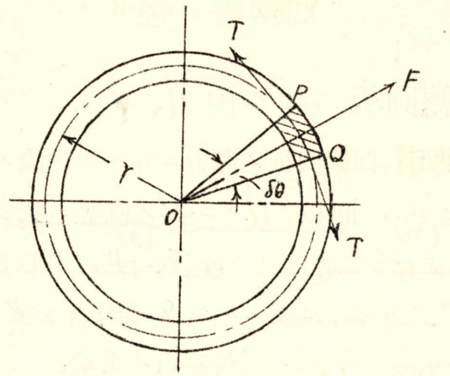
$$2T\sin\frac{\delta\theta}{2}=\frac{wSr^2\omega^2\delta\theta}{g}$$

$$\therefore \quad T=\frac{wS}{g}r^2\omega^2$$

引張内力ヲ σ トスレバ

$$\sigma=\frac{T}{S}=\sigma=\frac{wr^2\omega^2}{g}=\frac{wv^2}{g}$$

但シ v ハ周速度ナリ、



第160図

回転環ニ起ル内力、

σ_a : 許容内力

w : 重量 (単位容積)

ω : 角速度

$$\sigma_a=\frac{wr^2\omega^2}{g}=\frac{wv^2}{g} \qquad v=\sqrt{\frac{\sigma_a g}{w}}$$

σ_a ヲ材料ノ許容引張內力トスレバ

$$\sigma_a=\frac{wr^2\omega^2}{g}=\frac{wv^2}{g}$$

或ハ

$$v=\sqrt{\frac{\sigma_a g}{w}}$$

vt ωt ωr $vt=\omega t\cdot r$ $v=\boxed{\omega r}$

九四、囘轉圓板ニ起ル內力、

玆ニ述ブル所ノ囘轉圓板 Rotating disc ノ內力ニ關スル理論ハ次ノ假定ノ下ニナサルルモノトス、(1) 圓板ノ厚サハ其ノ直徑ニ比シテ甚ダ小ナルコト，(2) 圓板ノ厚サハ一樣ナルコト，(3) 圓板ハ其ノ中心ヲ通ジ其ノ面ニ垂直ナル直線ヲ軸トシテ囘轉セルコト，是等ヲ假定スルモノトス、

w…………材料ノ單位容積ノ重量、

r_1…………圓板ノ內半徑、

r_2…………圓板ノ外半徑、

t…………圓板ノ厚サ、

ω…………角　速　度、

σ_r…………半徑方向ノ引張內力、

σ_θ…………周圍方向ノ引張內力、

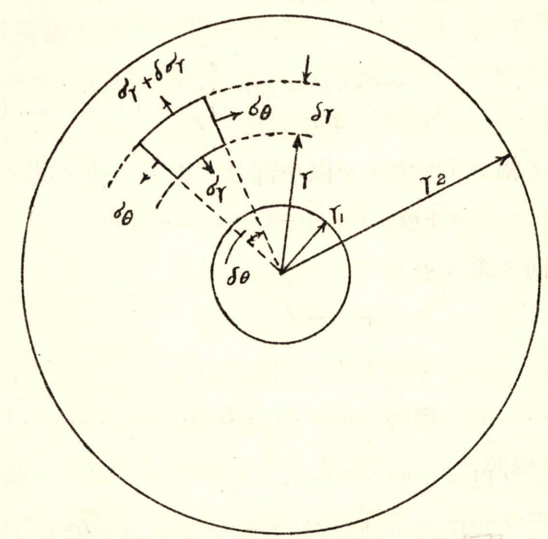
第 161 圖ヲ參照スベシ、半徑 r ト $r+\partial r$ トノ二ツノ圓筒面ト $\partial\theta$ ナル角ヲナセル二ツノ半徑面ニテ限ラレタル部分ニツキ求心力ハ

$$\frac{wtr\partial\theta\partial r}{g}r\omega^2 \quad\text{..............................}\quad (11\cdot1)$$

而シテ此ノ部分ニ作用セル力ノ半徑ノ向方ノモノハ

$$2\sigma_\theta t\partial r\sin\frac{\partial\theta}{2}+\sigma_r tr\partial\theta-(\sigma_r+\partial\sigma_r)t(r+\partial r)\partial\theta$$

$$\fallingdotseq t(\sigma_\theta\partial r-\sigma_r\partial r-r\partial\sigma_r)\partial\theta \quad\text{..................}\quad (11\cdot2)$$



第161図

(11・1) ト (11・2) トヨリ

$$\frac{wtr^2\omega^2\delta\theta\delta r}{g}=t(\sigma_\theta\delta r-\sigma_r\delta r-r\delta\sigma_r)\delta\theta$$

$$\therefore \quad \frac{wr^2\omega^2}{g}=\sigma_\theta-\sigma_r-r\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$\therefore \quad \sigma_\theta=\frac{wr^2\omega^2}{g}+\sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$=w\frac{r^2\omega^2}{g}+\frac{d}{dr}(r\sigma_r) \quad \cdots\cdots\cdots (11・3)$$

次ニ歪ミニツキテ考フルニ，歪ミガ中央斷面ニ於テ其ノ各點ノ r ヨリ $r+u$ ヘノ半徑方向ノ變位ニ基ヅクモノトスレバ，圓周方向ノ歪ミハ

$$\varepsilon_\theta=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{u}{r} \quad \cdots\cdots\cdots (11・4)$$

半徑方向ノ幅ガ δr ナリシ微小部分ノ歪ミノ後ノ其ノ幅ハ

$$r+\delta r+u+\delta u-(r+u)=\delta r+\delta u$$

故ニ半徑方向ノ歪ミハ

$$\varepsilon_r=\frac{\delta r+\delta u-dr}{\delta r}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_r=\frac{du}{dr} \quad \cdots\cdots\cdots (11・5)$$

但シ引張歪ミヲ以テ正號ノモノトス。

内力ト歪ミノ關係式ハ，回轉軸方向ノ主内力ヲ零トスレバ

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}=\frac{1}{E}\left(\sigma_\theta-\frac{\sigma_r}{m}\right) \cdots\cdots\cdots (11・6)$$

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}=\frac{1}{E}\left(\sigma_r-\frac{\sigma_\theta}{m}\right) \cdots\cdots\cdots (11・7)$$

(11・6) ト (11・7) トヨリ

$w^2 r^2 \omega^2 =$

$$\sigma_\theta=\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{du}{dr}\right)\text{............................}(11\cdot8)$$

$$\sigma_r=\frac{mE}{m^2-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{du}{dr}\right)\text{............................}(11\cdot9)$$

(11・3) ノ式ニ是等ノ σ_θ, σ_r ノ値ヲ入レテ

$$r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}=-\frac{w}{g}\omega^2\frac{m^2-1}{m^2E}r^2\text{ ....}(11\cdot10)$$

又ハ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=-\frac{w}{g}\omega^2\frac{m^2-1}{m^2E}r\text{ ....}(11\cdot11)$$

(11・11) ノ餘函數ヲ求ムルニ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=\frac{du^2}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=0$$

$$\therefore\quad \frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=\text{常數}=2A\text{ ....}(11\cdot12)$$

但シ A ハ常數ナリ、是ニ由テ

$$r\frac{du}{dr}+u=2Ar$$

$$\therefore\quad ur=Ar^2+B$$

$$\therefore\quad \frac{u}{r}=A+\frac{B}{r^2}\text{ ....}(11\cdot13)$$

B モ常數ナリ、(11・12), (11・13) ヨリ，又ハ (11・13) ヲ微分シテ

$$\frac{du}{dr}=A-\frac{B}{r^2}\text{ ....}(11\cdot14)$$

(11・13) ハ (11・11) ノ餘函數ナリ、

次ニ特解ヲ求ムルニ

$$u=Cr^3$$

ト置ク、此ノ關係ヲ (11・10) ニ入レテ

$\frac{d^2x}{dy^2}=f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=0$

$y=C_1X+C_2X$

$$C=-\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8E}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}$$

故ニ (11・10) ノ方程式ノ一般解ハ

$$\frac{u}{r}=A+\frac{B}{r^2}-\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8E}\frac{m^2-1}{m^2}r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot15)$$

$$\frac{du}{dr}=A-\frac{B}{r^2}-\frac{3w}{g}\frac{\omega^2}{8E}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot16)$$

(11・8), (11・9) ニ是等ノ値ヲ入レテ

$$\sigma_\theta=\frac{mE}{m^2-1}\left\{(m+1)A+(m-1)\frac{B}{r^2}-(m+3)\frac{w}{g}\cdot\frac{\omega^2}{8E}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}r^2\right\}\cdots\cdots\cdots (11\cdot17)$$

$$\sigma_r=\frac{mE}{m^2-1}\left\{(m+1)A-(m-1)\frac{B}{r^2}-(3m+1)\frac{w}{g}\cdot\frac{\omega^2}{8E}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}r^2\right\}\cdots\cdots\cdots (11\cdot18)$$

(i) 中央ニ孔アル圓板ノ場合、

$$\left.\begin{array}{ll} r=r_1, & \sigma_r=0 \\ r=r_2, & \sigma_r=0 \end{array}\right\}$$

(11・18) ニ此ノ關係ヲ入レテ

$$A=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8E}\frac{(3m+1)(m-1)}{m^2}(r_1^2+r_2^2)$$

$$B=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8E}\frac{(3m+1)(m+1)}{m^2}r_1^2r_2^2$$

故ニ (11・18) ヨリ

$$\sigma_r=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)\left(r_1^2+r_2^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}-r^2\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot19)$$

(11・17) ニヨリ

w：单位容积ノ重量.

r_1：円板内半径. r_2：外半径.

t：厚サ. ω：角速度.

σ_r：半径方向ノ引張应力.

σ_θ：周方向ノ引張应力.

(1) 中央ニ孔ノア円板.

$$\sigma_r=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)\left(r_1^2+r_2^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}-r^2\right)$$

$$\sigma_{r\,max}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)(r_2-r_1)^2 \qquad (r=\sqrt{r_1r_2}\text{ ニ於テ})$$

$$\sigma_\theta=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}\left\{(3m+1)\left(r_1^2+r_2^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}\right)-(m+3)r^2\right\}$$

$$\sigma_{\theta\,max}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{4m}\left\{(3m+1)r_2^2+(m-1)r_1^2\right\} \qquad (r=r_1\text{ ナルトキ})$$

(2) 实体円板

$$\sigma_\theta=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}\left\{(3m+1)r_2^2-(m+3)r^2\right\}$$

$$\sigma_{\theta\cdot max}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)r_2^2=\frac{3m+1}{8m}\frac{w}{g}(r_2\omega)^2 \qquad (r=0\text{ ナルトキ})$$

$$\sigma_r=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)(r_2^2-r^2)$$

$$\sigma_{r\,max}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)r_2^2 \qquad (r=0\text{ ナルトキ }\sigma_{\theta\,max}\text{ ト等シ}).$$

$$\sigma_\theta=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}\left\{(3m+1)\left(r_1^2+r_2^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}\right)-(m+3)r^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot20)$$

σ_θ ハ恒ニ正號ノモノナリ，而シテ r ガ增セバ σ_θ ハ減ジ、$r=r_1$ ナルトキ最大トナル，其ノ値ハ

$$\sigma_{\theta,\,\max.}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{4m}\left\{(3m+1)r_2^2+(m-1)r_1^2\right\}\cdots\cdots(11\cdot21)$$

r_1 ガ限リ無ク小トナレバ此ノ値ハ

$$\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{4m}(3m+1)r_2^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot22)$$

ニ近ヅク、又 r_1 ガ r_2 ニ近ヅクトキニハ前節ノ環ノ場合ノ式トナルベシ、 $r_1=r_2$

σ_r ハ $r=r_1$, $r=r_2$ ニ於テ零，而シテ r_1 ト r_2 トノ間ノ r ニツキテハ正號ノモノ即チ引張內力ナリ、(11・19) ヨリ

$$\frac{d\sigma_r}{dr}\propto\left(\frac{2r_1^2r_2^2}{r^3}-2r\right)$$

故ニ

$$r=\sqrt{r_1r_2}$$

ニ於テ σ_r ハ最大トナル，即チ半徑方向ノ引張內力ノ最大値ハ

$$\sigma_{r,\,\max.}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)(r_2-r_1)^2$$

$r_2^2-2r_2r_1+r_1^2$

(ii) 實體圓板ノ場合、

$$\left.\begin{array}{ll} r=r_2, & \sigma_r=0 \\ r=0, & u=0 \end{array}\right\}$$

(11・15) ニ上記ノ第二條件ヲ入レテ

$$\mathrm{B}=0$$

第一ノ條件ヲ (11・18) ニ入レテ

外面ニテ $\sigma_r=0$ ヨリ

$r_1=r_2=r$ トシ (11・21) ヨリ

$$\sigma_{\theta\,\max}=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{4m}4mr^2=\frac{w}{g}\omega^2r^2$$

$$A=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8E}\,\frac{(3m+1)(m-1)}{m^2}r_2^{\,2}$$

故ニ (11・8) ヨリ

$$\sigma_\theta=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8m}\left\{(3m+1)r_2^{\,2}-(m+3)r^2\right\}\ \cdots\cdots\ (11\cdot23)$$

σ_θ ハ $r=0$ ニ於テ最大トナル、

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\theta,\max.}&=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)r_2^{\,2}\\&=\frac{3m+1}{8m}\cdot\frac{w}{g}(r_2\omega)^2\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\ (11\cdot24)$$

又 (11・9) ニヨリ

$$\sigma_r=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)(r_2^{\,2}-r^2)\ \cdots\cdots\ (11\cdot25)$$

σ_r ハ恒ニ正號ノモノ即チ引張内力ニシテ r ガ增スニ從ヒテ減ズ,
最大値ハ中心ニアリテ (11・24) ノ値ト同ジク

$$\sigma_{r,\max.}=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8m}(3m+1)r_2^{\,2}$$

トナル、

彈性破損ニツキ歪ミ「エネルギー」說ヲ用フルモノトスレバ

$$\sigma_r^{\,2}+\sigma_\theta^{\,2}-\frac{2}{m}\sigma_r\sigma_\theta=\sigma_e^{\,2}$$

但シ σ_e ハ單純引張ノ場合ニ於ケル材料ノ彈性限界ナリ、是ニ由テ角速度ノ限界ヲ求ムレバ

$$\omega^2=\frac{g\sigma_e}{wr_2^{\,2}}\cdot\frac{8m}{3m+1}\sqrt{\frac{m}{2(m-1)}}\ \cdots\cdots\ (11\cdot26)$$

(11・24) ヲ (11・22) ト比較シテ實體圓板ノ最大内力即チ其ノ中心ニ於ケル内力ハ中心ニ小孔ヲ有スル圓板ノ最大ナル緣張内力ノ半分ナリ、又前節ノ薄キ環或ハ輪緣 (Rim) ノ場合ト比較スレバ實體圓板

.25 ト .24 トヲ比較スベシ

ノ最大内力ハ同一ノ半徑ノ環ガ同一ノ周速度ヲ以テ回轉セル場合ノ緬張内力ノ $\dfrac{3m+1}{8m}$ 倍ナリ、 $m=\frac{10}{3}$ トスレバ、0.412

九五、回轉圓壔ニ起ル内力、

圓壔ガ其ノ軸ヲ回轉軸トシテ回轉セル場合ノ内力ヲ求メントス、圓壔ハ半徑ニ比シテ其ノ長サ大ナリトシ，其ノ軸ノ中央ニ於ケル直截面上或ハ之ニ近キ直截面上ノ内力ニツキテ考フルモノトス、圓壔ノ軸ヲ z 軸トシ其ノ方向ノ内力ヲ σ_z トス、軸ノ中央ニ於ケル直截面ニヨリ作ラルル薄キ圓板ニツキ $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ ハ對稱ノ關係ニヨリ主内力ト見倣シテ可ナリ、又歪ミノ前ニ軸ニ直角ナル横斷面上ニアル總テノ點ハ歪ミノ後猶軸ニ垂直ナル一平面上ニ存在スルモノトス、此ノ假定ハ圓壔ノ兩端ニ近キ處ヲ除キテハ長キ圓壔ニツキ略ボ成立スルモノト見テ可ナルベシ、

圓板ノ場合ト同様ニ

$$\sigma_\theta = \frac{w}{g}\omega^2 r^2 + \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot 27)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_\theta + \sigma_z}{m}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot 28)$$

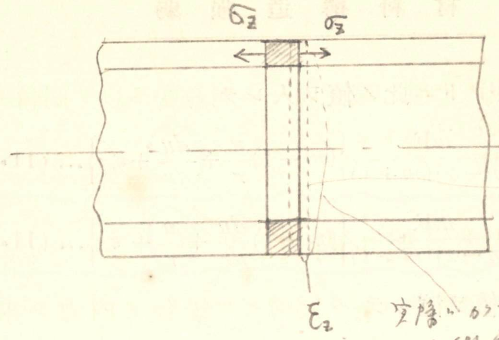
$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_r + \sigma_z}{m}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot 29)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{m}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot 30)$$

歪ミヲ受クル前ニ同ジ横斷面ニアル總テノ點ハ歪ミ後モ回轉軸ニ垂直ナル同一平面上ニアリトノ假定ニヨリ ε_z ハ常數ナリ、

(11·30) ヨリ

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{m} + E\varepsilon_z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11\cdot 31)$$



空隙ハカンナルモノナルガ計算上カンナリト假定シ ε_z = constant トス

σ

σ

(11•28) ト (11•29) トニ此ノ値ヲ入レテ

$$\sigma_\theta=\frac{mE}{(m-2)(m+1)}\left\{(m-1)\frac{u}{r}+\frac{du}{dr}+\varepsilon_z\right\}\dots(11\cdot32)$$ 11.8

$$\sigma_r=\frac{mE}{(m-2)(m+1)}\left\{(m-1)\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}+\varepsilon_z\right\}\dots(11\cdot33)$$ 11.9

ト　対照

(11•27) ニ是等ノ値ヲ置キテ

$$r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}=-\frac{w}{g}\omega^2\frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)E}r^2 \qquad\dots\dots(11\cdot34)$$

一般ハ前ノ場合ノ如ク

$$\frac{u}{r}=A+\frac{B}{r^2}-\frac{w}{g}\omega^2\frac{(m+1)(m-2)}{8m(m-1)E}\cdot r^2 \quad\dots\dots(11\cdot35)$$

$$\frac{du}{dr}=A-\frac{B}{r^2}-\frac{3w}{g}\omega^2\frac{(m+1)(m-2)}{8m(m-1)E}\cdot r^2 \quad\dots\dots(11\cdot36)$$

(i) 中空圓壔ノ場合、

$$\left.\begin{array}{ll} r=r_2, & \sigma_r=0 \\ r=r_1, & \sigma_r=0 \end{array}\right\}$$

是等ノ條件ニヨリ

$$B=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,\frac{(m+1)(3m-2)}{m(m-1)E}r_1^2r_2^2 \quad\dots\dots\dots\dots(11\cdot37)$$

$$A=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,\frac{(m+1)(m-2)(3m-2)}{m^2(m-\cancel{2}\,1)\,E}(r_1^2+r_2^2)-\frac{\varepsilon_z}{m} \qquad\dots\dots(11\cdot38)$$

常數ナルベキ ε_z ヲ定ムルコト次ノ如シ、

軸ノ自由端ニ軸方向ノ外力無シトス、圓壔ヲ軸ノ中點ニ於ケル直截面ニテ二ツニ分チタリトスルニ其ノ自由端ニ於テ軸ニ平行ニ作用スル外力モ無キヲ以テ

$$2\pi\int_{r_1}^{r_2}\sigma_z r dr=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11\cdot39)$$

ナラザル可ラズ、(11·32), (11·33) ニ (11·35), (11·36) ノ關係ヲ入レ更ニ是ニ由テ得ル所ノ σ_r, σ_θ ヲ (11·31) ニ入レテ

$$\sigma_z=\frac{mE}{(m-2)(m+1)}\left\{2A-\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{2}\frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)E}r^2+\frac{2\varepsilon_z}{m}\right\}+E\varepsilon_z \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11\cdot40)$$

(11·38) ヨリ A ノ値ヲ入レ r ヲ乘ズレバ

$$\sigma_z r=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{4}\left\{\frac{3m-2}{m(m-1)}(r_1^2+r_2^2)r-\frac{2r^3}{m-1}\right\}+E\varepsilon_z r \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11\cdot41)$$

(11·39) ニヨリ

$$\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{4}\left\{\frac{3m-2}{m(m-1)}\cdot\frac{r_2^4-r_1^4}{2}-\frac{r_2^4-r_1^4}{2(m-1)}\right\}+\frac{1}{2}E\varepsilon_z(r_2^2-r_1^2)=0$$

constant.

$$\therefore \quad \boxed{\varepsilon_z=-\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{2}\frac{r_1^2+r_2^2}{mE}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11\cdot42)$$

是ニ由テ ε_z ヲ定メ得タリ、

ε_z ノ此ノ値ヲ (11·38) ニ入レテ

$$A=\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{E}(r_1^2+r_2^2)\cdot\frac{3m-5}{8(m-1)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11\cdot43)$$

圓周方向ノ歪ミハ

$$\frac{u}{r}=\frac{w}{r}\frac{\omega^2}{8E}\left\{\frac{3m-5}{m-1}(r_1^2+r_2^2)+\frac{(m+1)(3m-2)}{m(m-1)}\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}-\frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)}r^2\right. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11\cdot44)$$

半徑方向ノ歪ミハ

$$\frac{du}{dr}=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8E}\left\{\frac{3m-5}{m-1}(r_1^2+r_2^2)-\frac{(m+1)(3m-2)}{m(m-1)}\,\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}-\frac{3(m+1)(m-2)}{m(m-1)}r^2\right\} \quad \cdots\cdots (11\cdot45)$$

又　中空円筒ノ場合

$$\sigma_\theta=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\left\{\frac{3m-2}{m-1}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}\right)-\frac{m+2}{m-1}r^2\right\} \quad \cdots\cdots (11\cdot46)$$

$$\sigma_r=\frac{w}{r}\,\frac{\omega^2}{8}\cdot\frac{3m-2}{m-1}\left(r_1^2+r_2^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}-r^2\right) \quad \cdots\cdots (11\cdot47)$$

$$\sigma_z=\frac{w}{r}\,\frac{\omega^2}{4}(r_1^2+r_2^2-2r^2)\frac{1}{m-1} \quad \cdots\cdots (11\cdot48)$$

σ_θ ハ恒ニ正號ニシテ $r=r_1$ ナル處ニ於テ最大トナル、

$$\sigma_{\theta,\,\max.}=\frac{w}{g}\cdot\frac{\omega^2}{4}\left(\frac{3m-2}{m-1}r_2^2+\frac{m-2}{m-1}r_1^2\right) \quad \cdots\cdots (11\cdot49)$$

r_1 ガ小トナレバ此ノ値ハ

$$\frac{w}{g}\cdot\frac{\omega^2}{4}\cdot\frac{3m-2}{m-1}r_2^2 \quad \cdots\cdots (11\cdot50)$$

ニ近ヅクベシ，軸ニ沿ヘル小孔ヲ有スル圓壔ノ最大内力ナリ、r_1 ガ r_2 ニ近ヅケバ σ_θ ハ $\frac{w}{g}(r_2\omega)^2$ トナルベシ、

σ_r ハ $r=r_1$, $r=r_2$ ニ於テ零，而シテ決シテ負號トハナラズ、

$$r=\sqrt{r_1r_2}$$

ニ於テ最大トナル、

$$\sigma_{r,\,\max.}=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,\frac{3m-2}{m-1}(r_2-r_1)^2 \quad \cdots\cdots (11\cdot51)$$

σ_z ハ $r=r_1$ ニ於テ最大ニシテ r ガ増セバ σ_z ハ減ズ、

$$r=\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}$$

ナルトキ σ_z ハ零トナル、r ガ更ニ大トナレバ負號ノモノ即チ壓縮内力トナル、其ノ最大値ハ圓壔表面ニアリテ

$$\frac{1}{m-1}\,\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{4}(r_2^2-r_1^2)$$

(ii) 實體圓壔ノ場合、

$$\left.\begin{array}{ll} r=r_2, & \sigma_r=0 \\ r=0, & u=0 \end{array}\right\}$$

(11·35), (11·36), (11·33) ニヨリ

$$B=0$$

$$A=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8E}\,\frac{(m+1)(m-2)(3m-2)}{m^2(m-1)}r_2^2-\frac{\varepsilon_z}{m}$$

又 ……………………………… (11·52)

$$2\pi\int_0^{r_2}\sigma_z r\,dr=0 \quad \text{……………………………… (11·53)}$$

(11·42) ニ $r_1=0$ トスレバ

$$\therefore \quad \varepsilon_z=-\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{2}\,\frac{r_2^2}{mE} \quad \text{……………………………… (11·54)}$$

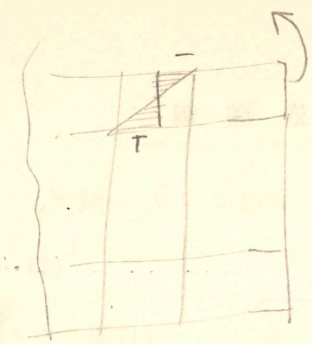
故ニ (11·52) ヨリ

$$A=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8E}\cdot\frac{3m-5}{m-1}\cdot r_2^2 \quad \text{……………………… (11·55)}$$

(11·35), (11·36) ニ此ノ A, B ノ値ヲ入レ, 更ニ $\frac{u}{r}$, $\frac{du}{dr}$ ヲ (11·32), (11·33) ニ入レテ

$$\sigma_\theta=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\left(\frac{3m-2}{m-1}r_2^2-\frac{m+2}{m-1}r^2\right) \quad \text{……………… (11·56)}$$

$$\sigma_r=\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,\frac{3m-2}{m-1}(r_2^2-r^2) \quad \text{……………… (11·57)}$$



[illegible] moment [illegible]

又

$$\sigma_z = \frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{4}(r_2^2 - 2r^2)\frac{1}{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11.58)$$

σ_θ ハ中心ニ於テ最大ニシテ

$\sigma_r max =$

$$\sigma_{\theta,\,\mathrm{max.}} = \frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,\frac{3m-2}{m-1}r_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11.59)$$

軸ニ沿ヒ小孔ヲ有スル場合ノ半分ニ等シ、

σ_r モ亦軸上ニテ最大トナリ其ノ値ハ $\sigma_{\theta,\,\mathrm{max.}}$ ニ等シ、

σ_r ハ引張内力ニシテ軸上ヨリ表面ニ至ルニ従ヒテ減ジ表面ニ於テ零トナル、

σ_z ハ軸上ニテ最大引張内力

$$\frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{4}\cdot\frac{r_2^2}{m-1}$$

ニシテ

$$r = \frac{r_2}{\sqrt{2}}$$

ニテ零トナリ，更ニ r ガ増セバ壓縮内力トナリ，表面ニ於テハ軸上ノ引張内力ト同一ノ値トナル、

次ニ σ_r, σ_θ ノ値ヲ中空圓板及中空圓壔ノ場合ニ就キ比較ヲ行フ $m = \frac{10}{3}$ トオケバ

中空圓板ニ於テハ

$$\sigma_r = \frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,3{\cdot}30\left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2\right) \ldots\ldots (11.60)$$

$$\sigma_\theta = \frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\left\{3{\cdot}30\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) - 2{\cdot}11r^2\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots (11.61)$$

中空圓壔ニ於テハ

σ_θ

$$\sigma_r = \frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\,3{\cdot}42\left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2\right) \ldots\ldots (11{\cdot}62)$$

$$\sigma_\theta = \frac{w}{g}\,\frac{\omega^2}{8}\left\{3{\cdot}42\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) - 2{\cdot}28 r^2\right\} \quad \boxed{r = r_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (11{\cdot}63)$$

是等ノ式ヲ比較スルニ短キ圓壔即チ圓板ノ場合ト長キ圓壔ノ場合トニ於テ其ノ内力ニ大差無キコトガ知ラル、是ニ由テ比較的短キ圓壔ノ場合ニモ上掲ノ長キ圓壔ノ場合ノ式ヲ應用スルモ甚シキ不都合ハ無キモノト考フルコトヲ得ベシ、

九六、厚サ一樣ナラザル囘轉圓板ニ起ル内力、

前節ニ述ベシ如ク σ_θ モ σ_r モ長キ圓壔ト圓板トニツキ大差無キコトヲ知リタリ、依テ次ニ述ブル理論モ略ボ正確ニ近キモノト見テ可ナルベシ、

第 162 圖ニヨリ微小部分ニ作用スベキ求心力ハ

$$\frac{w}{g}\omega^2 r \cdot r\delta\theta \cdot \delta r \cdot z \ldots\ldots\ldots\ldots (11{\cdot}64)$$

又コノ微小部分ニ作用セル力ノ半徑方向ノモノハ

$$\sigma_\theta z\delta r\delta\theta + \sigma_r z r\delta\theta - (\sigma_r + \delta\sigma_r)(r + \delta r)\delta\theta \cdot (z + \delta z)$$

即チ

64=65 場合

$$(\sigma_\theta z\delta r - \sigma_r z\delta r - rz\delta\sigma_r - \sigma_r r\delta z)\delta\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (11{\cdot}65)$$

(11・64) ト (11・65) トニヨリ

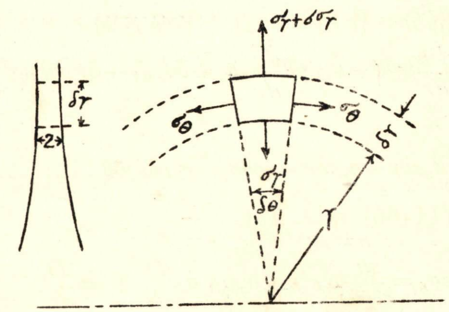
$$z\sigma_\theta = \frac{w}{g}\omega^2 r^2 z + \sigma_r z + \sigma_r\frac{dz}{dr} + rz\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$= \frac{w}{g}\omega^2 r^2 z + \frac{d}{dr}(rz\sigma_r) \ldots\ldots\ldots\ldots (11{\cdot}66)$$

圓板ノ場合ノ如ク $\sigma_z = 0$ トスレバ

$\sigma_\theta\, z\, \delta r\, \delta\theta$

$2\sigma_\theta\, z\, \delta r \sin\frac{\delta\theta}{2}$



第162図

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}=\frac{1}{E}\left(\sigma_\theta-\frac{\sigma_r}{m}\right)$$

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}=\frac{1}{E}\left(\sigma_r-\frac{\sigma_\theta}{m}\right)$$

$$\therefore \quad \sigma_\theta=\frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{du}{dr}\right) \quad \text{.............} (11\cdot67)$$

$$\sigma_r=\frac{mE}{m^2-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{du}{dr}\right) \quad \text{.............} (11\cdot68)$$

此ノ値ヲ (11•66) ニ置キテ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{1}{z}\frac{dz}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr}+\left(\frac{1}{mrz}\frac{dz}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)u$$

$$=-\frac{w}{r}\omega^2\frac{m^2-1}{m^2E}r \quad \text{.............................} (11\cdot69)$$

此ノ式ノ解ハ z ノ式ニ關ス，若シ

$$\boxed{z=kr^n}$$

トスレバ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n+1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{n-m}{mr^2}u=-\frac{w}{g}\omega^2\frac{m^2-1}{m^2E}r$$

$$\text{.............................} (11\cdot70)$$

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+(n+1)r\frac{du}{dr}+\frac{n-m}{m}u=-\frac{w}{r}\omega^2\frac{m^2-1}{m^2E}r^3$$

$$\text{.............................} (11\cdot71)$$

餘函數ヲ得ルタメ

$$u=cr^a$$

ト置キ上左ニ入レテ次ノ式ヲ得、

$$a^2+na+\frac{n}{m}=1$$

a ノ二ツノ値ヲ a_1, a_2 トスレバ

$$z=kr^n$$

$$\frac{dz}{dr}=nkr^{n-1}$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dr}+\frac{1}{r}=\frac{1}{kr^n}nkr^{n-1}+\frac{1}{r}$$

$$=\frac{n}{r}+\frac{1}{r}=\frac{n+1}{r}$$

$$\frac{1}{mrz}\frac{dz}{dr}-\frac{1}{r^2}=\frac{nkr^{n-1}}{mrkr^n}-\frac{1}{r^2}=\frac{n-m}{mr^2}$$

$$u=cr^\alpha \quad \frac{du}{dr}=c\alpha r^{\alpha-1} \quad \frac{d^2u}{dr^2}=c\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2}+(n+1)r\frac{du}{dr}+\frac{n-m}{m}u=0$$

$$r^2c\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+(n+1)rc\alpha r^{\alpha-1}+\frac{n-m}{m}cr^\alpha=0$$

$$\alpha(\alpha-1)+(n+1)\alpha+\frac{n-m}{m}=0$$

$$\alpha^2-\alpha+n\alpha+\alpha+\frac{n}{m}-1=0$$

$$\alpha^2+n\alpha+\frac{n}{m}=1$$

$$u_1=cr^{\alpha_1} \quad ; \quad u_2=c'r^{\alpha_2}$$

log 3 — 0.3009

log 3 — 1.7001

$n = kCr^{\alpha_1} + k^2C'r^{\alpha_2}$

$$u = C_1 r^{\alpha_1} + C_2 r^{\alpha_2} \qquad \text{(11·72)}$$

(11·71) ノ特解トシテ

$$u = Br^3$$

0.3010

トス、(11·71) ニヨリ

$$B = -\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{E}\frac{m^2-1}{m(3mn+8m+n)} \qquad \text{(11·73)}$$

一般解トシテ

$$u = C_1 r^{\alpha_1} + C_2 r^{\alpha_2} - \frac{w}{g}\frac{\omega^2}{E}\frac{m^2-1}{m(3mn+8m+n)}r^3 \qquad \text{(11·74)}$$

(11·67) 及 (11·68) ニ此ノ値ヲ入レテ σ_θ, σ_r ヲ得ベシ、C_1, C_2 ハ其ノ場合ニ應ジ與ヘラレタル條件ニヨリ定ムベキナリ、例ヘバ第 163 圖ノ如キ場合ニ於テハ全體ヲ三部ニ分チテ考フ, 即チ「リム」ト AB ノ部分ト「ボス」トノ三部ナリ、σ_r, σ_θ ノ式中ニハ各部毎ニ二ツノ常數ヲ含ミ, 全體ニテ六個ノ常數トナル、是等ヲ定ムル條件トシテ

(1) $r = r_1, \quad \sigma_r = 0.$

(2) $r = r_4, \quad \sigma_r = 0.$

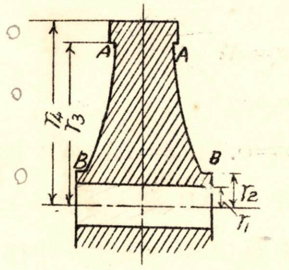
(3) $r = r_2, \quad u$ ハ「ボス」ト AB 部トニツキ同一ナリ、

(4) $r = r_3, \quad u$ ハ AB 部ト「リム」トニツキ同一ナリ、

(5) 圓板部ノ斷面 AA ニ於ケル半徑方向ノ全內力ハ「リム」ノ斷面 AA ニ於ケルモノト相等シ、

(6) 同様ニ BB ニ於ケル半徑方向ノ全內力ハ圓板部ヨリ求メタルモノト「ボス」ヨリ求メタルモノト相等シ、

是等ノ關係ニヨリ常數ヲ定ムルヲ得ベシ、



第163図

九七、均一ナル强サノ圓板、

σ_θ, σ_r ガ等シク且圓板ノ總テノ點ニ於テ一定ナル値ヲ有スルトキ

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma = \text{常數}$$

前節 (11・66) ニヨリ

$\sigma_z = \frac{w}{g}\omega^2 z r + \sigma_r r \frac{dz}{dr}$

$$\sigma z = \frac{w}{g}\omega^2 z r^2 + \sigma \frac{d}{dr}(rz)$$

$$\therefore \qquad \frac{dz}{dr} + \frac{w}{g}\frac{\omega^2}{\sigma} z r = 0$$

積分因數トシテ

$e^{\int \frac{w}{g}\frac{\omega^2}{\sigma} r dr} = e^{\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma} r^2}$

$$e^{\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{\sigma} r^2}$$

ニヨリ

$$\frac{d}{dr}\left(z e^{\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma} r^2}\right) = 0$$

$$\therefore \qquad z = A e^{-\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma} r^2}$$

A ハ常數ニシテ

$$r = 0, \qquad z = A$$

$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma =$ const

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$　　$\sigma_r \geqq \sigma_\theta$

最大剪断力説ニヨルト.

1. $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_r - 0) = \frac{1}{2}\sigma_r = \tau_e = \frac{1}{2}\sigma_e$　$\therefore \sigma_r = \sigma_e$

最大主内力説ニヨルト.

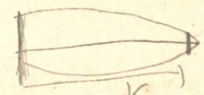
$\sigma_r = \sigma_e$

$2\pi n = \omega$

$2\pi \frac{3000}{60} = \omega$

$\frac{dz}{dr} + \frac{w}{g}\frac{\omega^2}{\sigma} z r = 0$

$\frac{dz}{z} = -\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{\sigma} r dr$.　別個ニ積分ヲ行フ



$z = A e^{-\frac{w}{g}\frac{\omega^2}{2\sigma} r^2}$

z_0 —— r_0

$A =$ ——

$z = A$ —— r_0

$z = z_0 e^{\frac{w}{g}\frac{\omega_0^2}{2\sigma} r_0^2}$

$1.5 \quad \frac{0.0078}{980} \frac{(2\pi \times 50)^2}{2 \times 250} (100)^2$

$= 1.97$

$e^{1.97} = 7.15$

$z = 11.25$

第五十一期

安藤雅淑