海軍機關學校

水力學教科書

卷之一

第三學年

昭和十三年六月

海軍機關學校長　兼田市郎

昭和十三年六月

本書ニ依リ水力學ヲ修得スヘシ

沿革

舊力學敎科書卷ノ三（流體力學）及水力學敎科書ノ前半ヲ改訂增補シテ水力學卷ノ一トナス

第一版　昭和十三年六月　海軍敎授岡本元治郎編纂

水力學

卷之一

目次

水力學

巻之一

第一章

緒論

一、流體力學ト水力學、

流體ニ關スル力學ヲ流體力學ト稱ス、流體特ニ氣體ハ溫度ノ如何ニヨリテ其ノ體積ヲ變化スルコト著シ、斯クノ如ク熱作用ヲ伴フ氣體ノ事柄ハ熱力學ニ於テ取扱ヒ，流體力學ニ於テハ液體ノ問題ト氣體ノ問題ノ中體積變化少ク熱ニ關スル現象ヲ伴ハザル場合ヲ取扱フ、

一般ニ力學ヲ便宜上靜力學 (Statics) ト動力學 (Kinetics) トニ分ツ如ク流體力學ヲ流體靜力學ト流體動力學トノ二ツニ分チテ研究ス、

流體靜力學ハ靜止ノ狀態ニ於ケル流體ノ釣合ニ關スル問題ヲ取扱ヒ，流體動力學ハ流體ノ運動ニ關スル問題ヲ取扱フコトハ勿論ナリ、

流體力學ニ於テ取扱フ問題ハ複雜ニシテ相當多クノ假定ノ下ニ

數學的解式ヲ得ルモ未ダ數學的ニ解決シ得ザル場合多シ、サレバ實驗ト相俟ツテ其ノ研究ヲ進ムベキモノナリ、即チ理論的研究ノ結果ハ假定ノ下ニ導ケルモノナレバ實際ニハ或程度適合スルニ過ギズ、之ヲ實驗ニ依ツテ修正シ、又實驗ノ結果ヲ理論ニ依ツテ整理スルトイフ如ク兩者ガ相俟ツテ流體ノ力學的性質ヲ探究スベキナリ、

流體力學ト水力學トハ何レモ流體ニ關スル力學ナルガ前者ハ主トシテ理論的ニシテ後者ハ實際問題ヲ主トセルトノ相違アリ、即チ水力學ニ於テハ工學的ニ必要ナル問題ヲ取扱ヒ、流體ノ力學的性質ヲ利用セル機械ノ理論的根據ヲ與ヘル、

水力學ニ於テハ液體特ニ水ニ關スル問題ヲ主トシテ取扱フヲ通例トス、

二、流　體、

形狀ノ變化ニ對シテ少シモ抵抗ヲ現ハサザル物質ヲ完全流體トイフ、斯クノ如キ物質ニ對シテ剛性率ハ零トシテ差支ナク外力ニ抗シテ剪斷內力ヲ生ゼズ、

普通靜止ノ狀態ニ在ル流體ハ完全流體ト見做シテ可ナリ、流體ハ壓縮スルコト極メテ困難ナルニ反シ氣體ハ極メテ容易ニ壓縮シ得ルコトナリ、而モ氣體ハ大ナル容器ニアリテモ全體ニ一樣ニ擴充スル性質ヲ有ス、

液體ニソノ周圍ヨリ一樣ニ壓力ヲ加ヘテ壓縮スルトキハ最初ノ體積 v ガ壓力 Δp 丈增加セルタメニ Δv 丈減ジタリトス、

然ルトキハ

$$\boxed{\varkappa = \frac{\Delta v}{v} \Big/ \Delta p}$$

コノ $\varkappa$ ヲ液體ノ壓縮率トイフ、

實驗ノ結果ニ依レバ $\varkappa$ ノ値ハ (1 氣壓ニツキ)

水	0·000,044 cm²/kg
エーテル	0·000,110 〃
水銀	0·000,003 〃

斯クノ如ク液體ハ壓力ニヨリテ容積ヲ減ズル、然レドモ其ノ量ハ非常ニ僅少ニシテ液體ヲ取扱フ多クノ場合ニハ壓力ニヨリテ變化スル容積及密度ノ變化ヲ無視シ得ベキモノナリ、

壓縮率ノ零ナル流體ヲ不壓縮流體トイヒ、「不壓縮ニシテ完全流體ナルモノ即チ剛性率及壓縮率共ニ零ナル流體ヲ完全液體トイフ、

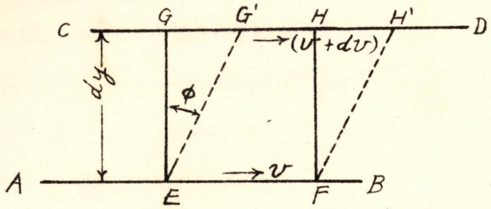
實際ノ液體ニ就キテハ壓縮率ヲ零ト見做スルコトハ差支ヘナシ、サレド運動スル場合ニハ其ノ剪斷内力ヲ生ゼズト假定シテ導ケル結果ハ事實ト相異ナル場合多シ、即チ次節ニ述ベル粘性ヲ考慮スル必要アリ、

三、粘　性、

固體ニ剪斷力ガ働ケバ其ノ内部ニソレニ抵抗スル剪斷内力ヲ生ズ、流體ニ於テモ同樣ニ剪斷力ニ對シテ其ノ内部ニ之ニ抵抗シテ互ニ剪斷セラレントスル面ニ沿ツテ生ズル、コノ抵抗力ヲ粘力ト稱ス、

面 AB, CD ヲ考ヘ其ノ距離ヲ dy トシ, AB ノ速度ヲ v トスレバ CD ノ速度ハ $v+dv$ ナリ、

EFHG ナル微小直六面體ハ EFH′G′ ナル微小平行六面體ノ如



ク變形シ其ノ歪ミハ $\phi=\dfrac{\overline{GG'}}{EG}$ トナル、

然ルニ粘力ハ歪ミニ正比例スルヲ以テ CD ナル面ニ沿ヒテ、ソノ單位面積上ニ働ク粘力ヲ τ トスレバ τ ハ ϕ ニ正比例シ $\dfrac{\tau}{\phi}$ ハ常數 μ ニ等シ、

$\dfrac{\tau}{\phi}=\mu$

然ルニ $\phi=\dfrac{dv}{dy}$

$\therefore \tau=\mu\phi$

$$\therefore \quad \boxed{\tau=\mu\frac{dv}{dy}}$$

μ ハ固體ノ橫彈性係數ト同一ノ物理的意義ヲ有スル常數ニシテ流體ノ場合ニハ之ヲ**粘性係數**トイフ、

μ ノ値ハ流體ノ種類ト溫度トニ關シ、溫度上昇ニ伴ヒテ減小ス、其ノ元方程式ハ $[\mu]=[FL^{-2}T]$ ナリ、

清水ノ μ ノ値ヲ示セバ次ノ如シ、

溫 度 (C)	0°	10°	20°	30°
μ (kg-sec/m²)	0·000,183,2	0·000,133,2	0·000,102,3	0·000,081,8

工業上ノ諸計算ニハ $\dfrac{\mu}{\rho}$ ヲ用フルコト多シ、之ヲ ν ニテ表ハス、ν ノ單位ハ m²/sec 又ハ cm²/sec ノ如キモノナリ、其ノ元方程式

$$[\nu]=\frac{[\mu]}{[\rho]}=\frac{[FL^{-2}T]}{[ML^{-3}]}=[FM^{-1}LT]=[MLT^{-2}][M^{-1}LT]$$

$\mu=\dfrac{\tau}{\frac{\partial v}{\partial y}} \quad \therefore [\mu]=[FL^{-2}]\,/\,[LT^{-1}L^{-1}]$

$=[FL^{-2}T]=[MLT^{-2}L^{-2}T]$

$=[ML^{-1}T^{-1}]$

$=[L^2T^{-1}]$

μハ力ノ單位ヲ含メドモνハ之ヲ含マズ、全然力ニ關係ナキヲ以テνヲ動(性)粘性係數 (Kinematic coefficient of viscocity) トイフ、

清水ニ就キテノνノ値ハ次ノ如シ、

温度 (C)	0°	10°	20°	50°	100°
ν (cm²/sec	0·0178	0·0133	0·0100	0·0056	0·0030

又清水以外ノ種々ノ液ノ温度 18°C ニ於ケルνノ値ノ例ヲ示セバ

液	水銀	エーテル	アルコール	オリーブ油	アニリン	ベンゾール	グリセリン
ν cm/ces	0·0159	0·00265	0·01305	0·9220	0·0461	0·0658	9·8100

(物理學附表參照)

運動学的粘性係数

第二章

流體靜力學

四、靜壓力、

靜止スル流體內ニ於テハ任意ノ面ニ働ク壓力ハコノ面ニ垂直ナリ、何トナレバ若シ壓力ガ垂直ナラズトスレバ平行ナル分力ヲ有スルコトトナル、流體ニ對シテハ剛性率ガ零ナルヲ以テ平行分力ニ抗シ得ズシテ流體ノ運動ヲ起ス、

サレバ靜止スル流體ガ容器ニ接スル面ニ對シテノミナラズ流體ノ內部ニ於ケル任意ニ想像セル面ニ及ボス壓力ハ其ノ面ニ垂直ナリ、

今靜止セル流體中ニ面積 dS ナル微小平面 ABCD ヲ考ヘソレニ垂直ニ働ク壓力ヲ p トスレバコノ面ニ働ク全壓力ハ pdS ナリ、

次ノ圖ノ如ク此ノ面ヲ互ニ直角ナル二方向ニ投射シタル面ヲ CBEF 及ビ ADEF トシソレ等ノ面積ヲ夫々 dS_x 及 dS_y トシ各面ニ働ク壓力ヲ夫々 p_x, p_y トスレバ其等ノ面ニ働ク全壓力ハ夫々 $p_x dS_x$ 及 $p_y dS_y$ ナリ、

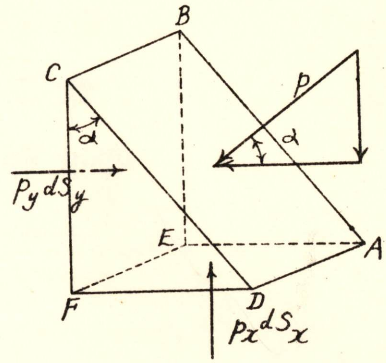
面 ABCD ト面 ADFE トノナス角ヲ α トシ此ノ微小三角柱ニ働ク力ノ釣合ヲ考フレバ

$$\left.\begin{aligned} pdS\cos\alpha &= p_y\, dS_y \\ pdS\sin\alpha &= p_x\, dS_x \end{aligned}\right\}$$

然ルニ

$$\left.\begin{aligned} dS\cos\alpha &= dS_y \\ dS\sin\alpha &= dS_x \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\ p=p_x=p_y$$



壓力 p_x, p_y ハ角 α ニ無關係ニシテ常ニ p ニ等シ、サレバ流體内ノ或一點ニ於テノ壓力ハ總テノ方向ニ均等ニ働クヲ知ル、

斯ク「靜止スル流體内ニ於テ働ク壓力ハ任意ニ考ヘタル面ニ對シテ垂直ニシテ流體内ノ一點ニ於ケル壓力ハ總テノ方向ニ於テ均等ナリ」、

斯クノ如キ性質ヲ有スル壓力ヲ流體ノ**靜壓力** (Statical pressure) トイフ、

五、流體ノ釣合ノ條件、

流體ガ外力ノ作用ノ下ニ釣合ノ狀態ニ在ルタメノ條件ヲ求メン、

靜止セル流體中ニ座標軸ノ夫々ニ平行ニシテ三稜ノ長サガ夫々 dx, dy, dz ナル微小直六面體 PABC ヲナス部分ヲトリ, 此ノ部分ノ釣合ヲ考フ、

流體ノ單位質量ニ作用スル外力ノ座標軸ノ方向ノ分力ヲ夫々 X, Y, Z トシ流體ノ密度ヲ ρ トス、P 點ニ於ケル壓力ヲ p トスレバ P′ 點ニ於ケル壓力ハ $p+dp$ ナリ、

面 PA′BC ニ垂直ニ働ク壓力 $p\,dy\,dz$ ト直六面體 PABC ニ作

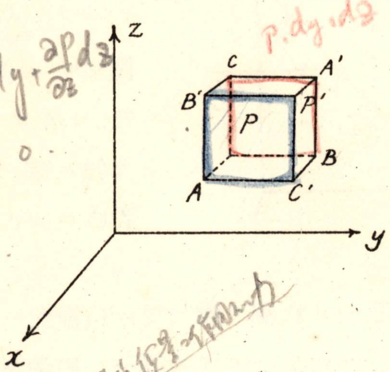
用スル外力ノ x 軸方向ノ分力 $\rho X\,dx\,dy\,dz$ トノ和ハ面 P′AB′C′ ニ垂直ニ働ク壓力 $\left(p+\dfrac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$ ニ等シ、即チ

$p=f(x\,y\,z)$

$dp=\dfrac{\partial p}{\partial x}dx+\dfrac{\partial p}{\partial y}dy+\dfrac{\partial p}{\partial z}dz$

$dy\ dz=0$

$\therefore dp=\dfrac{\partial p}{\partial x}dx$



單位容量ニ作用スル力

$$\boxed{p\,dy\,dz}+\rho X\,dx\,dy\,dz=\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

$$\therefore\quad \rho X=\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{同樣ニ}\quad \left.\begin{aligned}\rho Y&=\frac{\partial p}{\partial y}\\ \rho Z&=\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

流體ノ比重量ヲ γ トシ力ノ單位ヲ重力單位ニトレバ次ノ如ク書キ換ヘラル、

$$\left.\begin{aligned}\frac{\gamma}{g}X&=\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\gamma}{g}Y&=\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\gamma}{g}Z&=\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

此等ノ式ガ流體ノ釣合ニアルタメノ條件ヲ與ヘルモノナリ、

單位質量ニ X 方向ニ作用スル外力ヲ X トスル
故ニ 直六面体全体ニ作用スル外力ノ x 方向ノ分力ガ
$\rho X\,dx\,dy\,dz$ ナリ.

比重量 γ

単位容積内ニ於ケル重量ヲ比重量トシ

$\rho X=\dfrac{\partial p}{\partial x}$ ニ於テハ 圧力 p ハ X ガ絶対単位
トシテ規定サレテ居ル. 故ニ X ヲ重力単位トシテ規定セ
ントスルナラバ X ヲ g デ割ラナケレバナラヌ ∴ $\dfrac{\rho}{g}X=\dfrac{\partial p}{\partial x}$
例ヘバ 或ル物ノ重量 G ヲ G = a g トシテ規定
シテ居ル時 (a ノ単位ハ瓦) a ノ単位ヲ kg ニアラタメル
トスルト $G=\dfrac{a}{1000}$ kg. トスルが如キデアル。

$p=f(x\ y\ z)$

全微分 $dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz$.

静止スル流體ニアリテハ壓力 p ハ位置 (x, y, z) ノ函數ナルヲ以テ $p=\text{const}$ ハ等壓面ヲ表ハシ且ツ 等圧面ニテハ $p=f(xyz)=C$.

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz \quad =0$$

故ニ等壓面上ノ一點ニ於ケル法線ノ方向餘弦ハ $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ ニ比例ス、而シテ外力ノ力線 (line force) 上ノ一點ニ於ケル切線ノ方向餘弦ハ X, Y, Z ニ比例ス、

again

然ルニ

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big/X=\frac{\partial p}{\partial y}\Big/Y=\frac{\partial p}{\partial z}\Big/Z \quad \cdots\cdots (5.3)$$

サレバ等壓面ハ力線ニ垂直ナリ、

例ヘバ外力ガ重力ノ場合ニハ等壓面ハ鉛直線ニ垂直ナル水平面ナリ、

〔注意〕 力線ノ微分方程式ハ次ノ如シ、

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

六、重力場ニ於ケル液體ノ釣合、

外力ガ地球ノ重力ノミノ場合ニハ z 軸ヲ鉛直上方ニトレバ x, y 軸ハ水平面上ニ在リ、單位質量ニ働ク外力ノ座標軸ノ方向ノ分力ハ $X=Y=0,\ Z=-g$ ナリ、

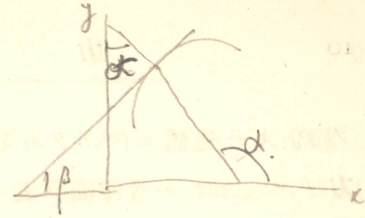
依ッテ $dp=-\rho g\,dz$

液體ノ密度 ρ ハ壓力ニ關セズ一定ト見做シ得ルヲ以テ上式ヲ積分シテ

$$p=-\rho gz+c$$

茲ニ c ハ積分常數ナリ、$z=z_0$ ナル液體ノ自由表面ニ働ク壓力

平面ノ場合



$f(x, y)=c$

$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=\tan\beta=-\cot\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$

$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}=\cos\alpha : \cos\alpha'$

立体ノ場合

$l : m : n=\frac{\partial p}{\partial x} : \frac{\partial p}{\partial y} : \frac{\partial p}{\partial z}$ 等圧面法線ノ方向余弦

$\lambda : \mu : \nu = X : Y : Z$ 力線ノ作用線(流線切線)ノ方向余弦

$\frac{\partial p/\partial x}{X}=\frac{\partial p/\partial y}{Y}=\frac{\partial p/\partial z}{Z}$

故ニ 等圧面ノ法線ト外力ノ作用線ハ同一方向ヲ取ル

(5.1) ヨリ
$$\begin{cases}\rho X=\frac{\partial p}{\partial x}\\ \rho Y=\frac{\partial p}{\partial y}\\ \rho Z=\frac{\partial p}{\partial z}\end{cases}$$
$X\ Y=0$ $Z=-g$ デアルカラ p ハ Z ノミノ函数トナル

$\therefore \rho Z=\frac{dp}{dz}$

$\therefore dp=-\rho g\,dz$

ヲ p_0 トスレバ $c=p_0+\rho g z_0$ トナル、故ニ液體内ノ一點ニ於ケル壓力 p ハ

$$p-p_0=\rho g(z_0-z) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1)$$

液體ノ自由表面ヨリノ深サヲ h トスレバ

$$p-p_0=\rho g h$$

比重量ヲ γ トシ，力ノ單位ヲ重力單位ニトレバ次ノ如クナル、

$$\left.\begin{aligned} p-p_0&=\gamma h \\ \text{又ハ}\quad \frac{p-p_0}{\gamma}&=h \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.2)$$

茲ニ p_0 ハ自由表面ニ於ケル壓力ニシテ大氣壓ナリ、

大氣壓ハ到ル所ニ一樣ニ働クモノナレバ外力ニ基ク有効壓力ハ $p-p_0$ ナリ、之ヲ**常用壓力** (Gauge pressure) トイヒ，之ニ對シテ眞空ヲ基準トシタル壓力 p ヲ**絶對壓力** (Absolute pressure) トイフ、

今 p ヲ以テ常用壓力ヲ表ハスコトニスレバ上ノ式ハ次ノ如クナル、

$$\left.\begin{aligned} p&=\gamma h \\ \text{又ハ}\quad \frac{p}{\gamma}&=h \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.3)$$

即チ液體中ノ任意ノ點ニ働ク常用壓力 p ハ液面ヨリノ深サ h ニ比例ス、

常用壓力 p ヲ比重量ヲ γ ニテ除シタル値 h ヲ**壓力水頭** (Pressure head) トイフ、

七、大氣壓ト高サトノ關係、

大氣ガ地球ヲ圍ミテ夫ガ釣合ツテキル場合ヲ考ヘン、

大氣ハ氣體ナルヲ以テ壓力ニヨリテ其ノ密度ヲ異ニス、更ニ大

氣ノ場合ニハ上空ニ到ルニ從ツテ溫度下降スルガ故ニ溫度ノ影響ヲモ考慮セザルベカラズ、

今溫度 $0°\mathrm{C}$ ニ於テノ大氣ノ壓力ヲ p_0, 容積ヲ v_0 トシ, 溫度 $t°\mathrm{C}$ ニ於テノ壓力ヲ p, 容積ヲ v トスレバ Boyle-Charle ノ法則ヨリ

1　$$pv=p_0v_0\left(1+\frac{t}{273}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

溫度 $0°\mathrm{C}$ ニ於ケル大氣ノ密度ヲ ρ_0, 溫度 $t°\mathrm{C}$ ニ於ケル密度ヲ ρ トスレバ一定量ノ空氣ノ總質量ハ膨脹收縮ニハ無關係ナルヲ以

2　テ $\rho v=\rho_0v_0$ ナリ、依ツテ式 (i) ヨリ

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho_0}\left(1+\frac{t}{273}\right)$$

即チ

$$\rho=\frac{\rho_0}{p_0\left(1+\frac{t}{273}\right)}p\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

然ルニ流體ノ釣合ノ條件ニヨリテ

3　$$dp=-\rho g dz\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

式 (ii) ヲ式 (iii) ニ代入シテ次ノ式ヲ得

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\rho_0}{p_0\left(1+\frac{t}{273}\right)}gdz\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

重力加速度 g ハ上空ニ到ルニ伴ヒテ減少ス、サレド其ノ變化ノ量ハ小ニシテ航空機等ノ達シ得ル程度ニテハ g ヲ一定ト見做シテ差支ナシ、

式 (iv) ヲ積分シテ

$$\log p=\frac{-\rho_0 g}{p_0\left(1+\frac{t}{273}\right)}z+c$$

c ハ積分定數ニシテ $z=0$ 即チ地表ニ於テ $p=p_1$ トスレバ

$c=\log p_1$ トナル、

$$\therefore \quad \log\frac{p_1}{p}=\frac{\rho_0 g}{p_0\left(1+\frac{t}{273}\right)}z$$

又

$$z=\frac{p_0\left(1+\frac{t}{273}\right)}{\rho_0 g}\log\frac{p_1}{p}$$

此ノ公式ニヨリテ大氣中ノ任意ノ位置ニ於ケル大氣壓ヲ知リテ其ノ位置ノ高サヲ知ルコトヲ得、

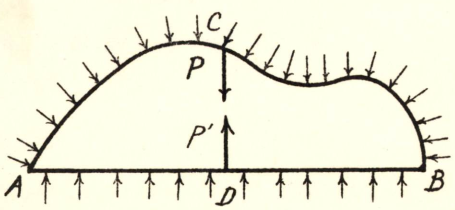
〔**注意**〕(1)　溫度 t ハ一定トナシタレドモ高サガ增スニ伴ヒテ溫度下降スル、t ハ z ノ函數デアルガ未ダ明確ナラズ、普通ニハ高サノ增加ニ伴ヒテ之ニ比例シテ溫度ガ下降スルト考ヘラル、故ニ t ハ地表ト高サ z ナル二位置ノ平均溫度トシテ計算スレバ大ナル誤差ハナカルベシ、

(2)　$\log\frac{p_1}{p}$ ハ自然對數ナリ、$\log_e\frac{p_1}{p}=2{\cdot}3026\log_{10}\frac{p_1}{p}$

(3)　定數 273 ハ乾燥セル空氣ニ對スル値ナリ、實際ノ大氣ハ多少濕潤ナルガ故ニ 250 トスル方ガ事實ニ適合スベシ、

八、面ニ働ク全壓力及其ノ中心、

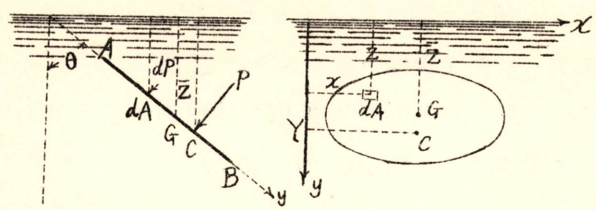
液體中ニ在ル一ツノ曲面ニ働ク全壓力ハ其ノ投射平面ニ働ク全



壓力ニ等シ、故ニ液體中ニアル任意ノ曲面ニ働ク全壓力ヲ求ムルニハ其ノ曲面ノ投射平面ニ働ク全壓力ヲ計算スレバ可ナリ、

今一ツノ平面ニ働ク全壓力ヲ求メントス、其ノ平面ガ液ノ自由表面トノ交線ヲ x 軸トシ，之ニ垂直ニシテ平面 AB 上ニ引ケル直線ヲ y 軸トス、

平面 AB ガ鉛直線トナス角ヲ θ トシ、平面 AB 上ノ任意ノ微小面積ヲ dA トシ、其ノ位置ニ於ケル壓力ヲ p トシ、其ノ深サヲ z トスレバ



$$p=\gamma z \quad \text{(i)}$$

故ニコノ微小面積上ニ働ク全壓力ヲ dP トスレバ

$$dP=p\,dA=\gamma\,dA\,z \quad \text{(ii)}$$

此ノ平面 AB 全體ニ働ク全壓力 P ハ平面全體ニ就キテ dP ヲ積分シタルモノニ等シ、即チ

$$P=\gamma\int z\,dA \quad (8.1)$$

然ルニ平面 AB ノ全面積ヲ A トシ，其ノ重心 G トシ，G 點ノ深サヲ $\bar{z}$ トスレバ次ノ關係アリ

$$\boxed{\int z\,dA=A\bar{z}}$$

$$\therefore \quad \boxed{P=\gamma\bar{z}A}$$

平面ノ
重心ノ y 座標 ヲ $\bar{y}$ トスレバ

$$\bar{y}=\frac{\int y\cdot dA}{\int dA}=\frac{\int y\cdot dA}{A}$$

$$\therefore \bar{y}A=\int y\cdot dA$$

両辺ニ $\cos\theta$ ヲ 剰ズレバ

$$A\bar{y}\cos\theta=\cos\theta\int y\,dA$$

$$A\cdot\bar{z}=\int y\cos\theta\cdot dA \qquad \therefore \int z\,dA=A\bar{z}$$

$\gamma\bar{z}$ ハ重心ニ於ケル壓力ナリ、之ヲ $\bar{p}$ ニテ表ハセバ

$$P=\bar{p}A \qquad\qquad (8.2)$$

即チ「任意ノ面ニ働ク液體ノ全壓力ハ其ノ平面ノ傾斜ノ如何ニ拘ハラズ常ニ其ノ面ノ重心ニ働ク壓力ガ全面ニ均等ニ働クト考ヘタルトキノ全壓力ニ等シ、」

平面 AB ニ働ク全壓力 P ハ此ノ平面ノ各點ニ働ク壓力ノ合力ナリ、其等ノ平行ナル壓力ノ合力ノ作用點ヲ壓力ノ中心 (Centre of pressure) トイフ、

此ノ點ヲ C トシ，ソノ位置ヲ決定スルタメ x 軸ニ關スル力ノ能率ヲ計算スレバ其ノ全能率ハ全壓力 P ト其ノ腕 y_c トノ積ニ等シ、

即チ

p=γz

$$Py_c=\int y\,dP=\int py\,dA=\gamma\int yz\,dA$$

然ルニ　　$z=y\cos\theta$

(8.1)ヨリ $P=\gamma\int z\,dA=\gamma\cos\theta\int y\,dA,\quad \gamma\int yz\,dA=\gamma\cos\theta\int y^2\,dA$

$$\therefore \qquad y_c=\frac{\int y^2\,dA}{\int y\,dA} \qquad\qquad (8.3)$$

平面 AB ノ重心 G ヨリ x 軸ニ至ル距離ヲ y_G トスレバ

$$\int y\,dA=Ay_G$$

又平面 AB ノ x 軸ニ關スル面積ノ慣性能率ヲ I_x トスレバ

$$I_x=\int y^2\,dA$$

今平面 AB ノ重心 G ヲ通リテ x 軸ニ平行ナル直線ニ關スル慣性能率及廻轉半徑ヲ夫々 I, κ トスレバ

The end

La Fin

2

$$I_x = I + A y_G^2 = A\kappa^2 + A y_G^2$$

$$\therefore \quad y_c = \frac{I}{A y_G} + y_G = \frac{\kappa^2}{y_G} + y_G \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8.3')$$

依ツテ

$$\overline{GC} = y_c - y_G = \frac{\kappa^2}{y_G} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8.3'')$$

所與ノ平面 AB ニ就キテ κ ハ一定値ヲトレドモ y_G ハ平面ガ液中ニ深クニ置カルルホド大トナル、故ニ壓力ノ中心ト重心トハ接近スルコトトナル、

次ニ壓力ノ中心 C ヨリ y 軸ヘノ距離ヲ x_c トスレバ

$$P x_c = \int x dP = \int x p dA = \gamma \int x z dA = \gamma \cos\theta \int xy\, dA$$

又

$$P = \gamma \int z \cdot dA = \gamma \cos\theta \int y dA = \gamma \cos\theta \cdot y_G A$$

$$\therefore \quad x_c = \frac{\int xy\, dA}{\int y\, dA} = \frac{\int xy\, dA}{y_G \cdot A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8.4)$$

點 C ノ位置ハ式 (8.3) 及 (8.4) ニヨリテ決定セラル、

若シ y 軸ガ平面 AB ノ對稱軸ナルトキハ $\int xy\,dA = 0$ ナルヲ以テ $x_c = 0$ ニシテ點 C ハ y 軸上ニアリ、

實用上ノ平面ハ對稱軸ヲ有スル場合多シ、斯クノ如キ場合ニハ壓力ノ中心 C ハ其ノ對稱軸上ニ在リテ又其ノ重心モ亦其ノ軸上ニアリ、故ニ平面ノ延長ト液ノ自由表面トノ交線ヨリノ距離 y_c ヲ求ムレバ充分ナリ、

[質量 M ナル剛体ノ任意ノ軸ニ関スル慣性能率ヲ I
重心ヲ通ル之ニ平行ナル軸ニ関スル 〃 ヲ I_0
ニ軸ノ距離ヲ d トスレバ
$\underline{I = I_0 + M d^2}$.]

[$\kappa^2 = \dfrac{I}{M}$].

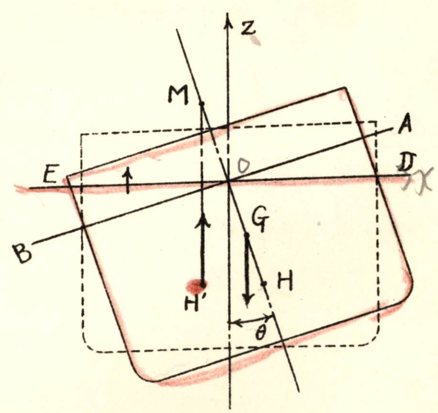
M = A トスレバ　$I = A\kappa^2$

九、浮體ノ釣合、

一ツノ固體ガ液體ノ上ニ浮ビテ釣合ニ在ル場合ニハ固體ガ排除シタル液體ノ重量ニ等シキ浮力ガ働キテ其ノ固體ノ重量ト釣合フ、故ニ其ノ浮力ノ中心ト固體ノ重心トハ同一鉛直線上ニ在リ、

浮力ノ中心ハ固體ガ排除シタル部分ノ重心ナルヲ以テ固體ガ傾斜スレバ其ノ部分ノ形狀ヲ變ズルヲ以テ其ノ浮力ノ中心ハ固體ノ重心ト同一鉛直線上ナシ、従ツテ固體ヲ廻轉セントスル偶力ヲ生ジソレガ固體ヲ元ノ位置ニ復歸セシムル如ク働クトキハ其ノ釣合ハ安定ニシテ, 反對ニ益々元ノ位置ヨリ遠カル如ク廻轉スルトキハ不安定ナル釣合ナリ、固體ガ傾キタル位置ニ於テ釣合フ如キ場合ヲ中立ノ釣合トイフ、

物體ヲ液ノ自由表面ヲ以テ切リタルトキノ切斷面ヲ Plane of floatation トイフ、次ノ圖ニ於テ AB ハ物體ガ釣合ノ狀態ニ在ルトキノ Plane of floatation ヲ表ハシ, DE ハ O ヲ過ギリ紙面ニ垂直ナル水平軸ノ周リニ微小角 $\delta\theta$ 丈ケ廻轉シタル後ノ Plane of floatation ヲ表ハスモノトス、



又 G ハ物體ノ重心, H, H' ハ夫々舊及新位置ニ於ケル浮力ノ中心トシ, G, H, H' ハ同一鉛直面內ニ在リトス、

OD ヲ x 軸トシ, O ヲ過ギリ紙面ニ垂直後方ニ向フ水平線ヲ y 軸トシ, O ヲ過

ギリ上方ニ向フ鉛直線ヲ z 軸トス、

重力ノ外ニ力ガ作用セザルヲ以テ浮ビ上リタル部分 AOD ト沈ミタル部分 BOE トノ容積ハ相等シカラザルベカラズ、故ニ Plane of floatation ノ全面積ニ就キテ

$$\iint z dx dy = \delta\theta \int x dx dy$$

ノ積分値ハ零ナラザルベカラズ、即チ

$$\iint x\, dx\, dy = 0$$

故ニ O ヲ通過スル廻轉軸（水平軸）ハ Plane of floatation ノ幾何學的ノ中心ヲ通過スルコト明ナリ、

浮ビ上リタル部分及沈下シタル部分ニ相當スル液體ノ浮力ニヨル x 及 y 軸ニ關スル廻轉能率ヲ夫々 M_x, M_y トスレバ、

$$M_x = \rho g \iint zy\, dx\, dy = \rho g\, \delta\theta \iint xy\, dx\, dy$$

$$M_y = \rho g \iint zx\, dx\, dy = \rho g\, \delta\theta \iint x^2\, dx\, dy$$

ニシテ y 軸ガ Plane of floatation ノ對稱軸ナリトスレバ $M_x = 0$ ナリ、而シテ Plane of floatation ノ對稱軸ニ關スル面積ノ慣性能率ヲ I トスレバ

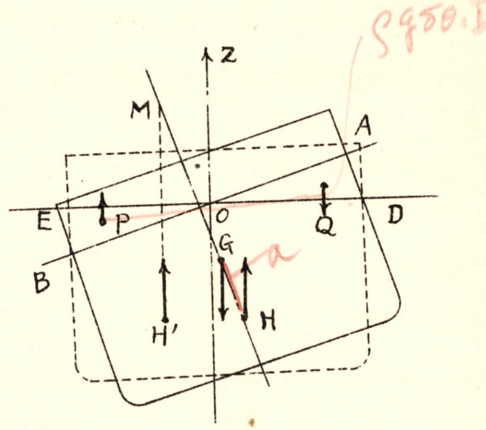
$$M_y = \rho g \delta\theta I \quad \text{.................................... (i)}$$

物體ノ質量ヲ m トスレバ重心 G ニ作用スル重力 mg ト H′ ニ作用スル浮力 mg トガ此ノ物體ニ働ク、

今元ノ浮力ノ中心 H ニ浮力 mg ガ作用スルト假定スレバ其ノ浮力ト沈下セル部分ノ浮力ノ増加（正ノ浮力）及浮ビ上リタル部分ノ浮力ノ減少(負ノ浮力) [redacted] トノ合力ガ H′ ニ作用スル浮力ニ等シ、

mg

物體ニ働ク力ハ重心 G ニ働ク重力 mg, H ニ働ク浮力 mg, OEB



ノ部分ニ働ク正ノ浮力 P, 及 ODA ノ部分ニ働ク負ノ浮力 Q ノ四ツノ力ナリ、而シテ P, Q ノ二ツ力ハ物體ヲ舊位置ニ復歸セントスル偶力ヲナシ、其ノ能率ハ §950 I $mga\delta\theta$ ナリ、$\overline{\mathrm{GH}}=a$ トスレバ H ニ働ク浮力ト G ニ働ク重力トハ更ニ傾斜ヲ大ナラシムル方向ニ廻轉セントスル偶力ヲナシ其ノ能率ハ $mga\delta\theta$ ナリ、故ニ四ツノ力ニ依ツテ舊位置ニ復歸セントスル廻轉能率ハ次ノ如クナル、

$$(\rho \mathrm{I} - ma)g\,\delta\theta \quad \text{.................................} \quad \text{(ii)}$$

H′ ヲ通過スル鉛直線ガ GH 線トノ交點ヲ M トス、之ヲ**僞中心** (Metacentre) ト稱シ, GM $=h$ ヲ**僞中心ノ高サ** (Metacentric height) ト稱ス、

H′ ニ働ク浮力ト重心 G ニ働ク重力トハ物體ヲ舊位置ニ復歸セントスル偶力ヲナス、其ノ能率ハ

$$mgh\,\delta\theta \quad \text{.................................} \quad \text{(iii)}$$

ナリ 式 (ii), (iii) ニテ示サレルモノハ同一ノ能率ナリ、

$$\therefore \quad \boxed{h=\frac{\rho \mathrm{I}}{m}-a} \quad \text{.................................} \quad (6.1)$$

物體ノ液體中ニアル部分ノ容積ヲ V トスレバ $m=\rho\mathrm{V}$ ナルヲ以テ上ノ式ハ次ノ如クナル、即チ

$$h = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{V}} - a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9.2)$$

此ノ式ヲ適用シテ浮體ノ釣合ノ狀態ヲ次ノ如ク區別セラル、

(1) $h>0$ ナルトキハ傷中心 M ハ重心 G ノ上方ニ在ルヲ以テ物體ハ舊位置ニ復歸ス、即チコノ場合ニハ浮體ノ釣合ハ安定ナリ、

(2) $h<0$ ナルトキハ僞中心 M ハ重心 G ノ下方ニ在ルヲ以テ物體ハ益々傾斜スルニ到ル、即チコノ場合ニハ浮體ノ釣合ハ不安定ナリ、

(3) $h=0$ ナルトキハ僞中心 M ト重心トハ一致ス、即チ浮力ノ中心ト重心トハ同一鉛直線上ニ在ルヲ以テ其ノ位置ニ於テ釣合フ、コノ場合ノ浮體ノ釣合ハ中立ナリ、

又上式ノ h ノ値ノ大小ニ依ツテ浮體ノ釣合ノ安定度ヲ定メルコトヲ得ベシ、

〔問〕 船舶等ノ場合ニ於テ前後軸及重心ヲ過ギル橫軸ニ關スル動搖ニ對シテ其ノ安定度ヲ比較セヨ、

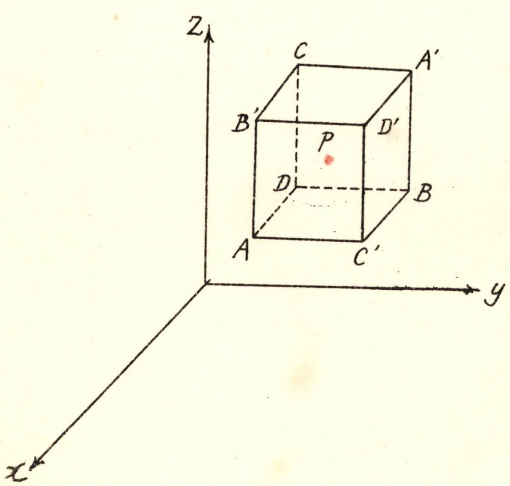
第三章

流體動力學ノ基本式

一〇、流體力學ノ運動方程式、

一時刻 t ナルトキ一點 $P(x,y,z)$ ニ於ケル壓力ヲ p, 密度ヲ ρ トシ流體ノ單位質量ニ働ク外力ノ座標軸ノ方向ノ分力ヲ夫々 X, Y, Z トス、

點 $P(x,y,z)$ ヲ中心トシ座標軸ニ平行ナル稜ノ長サガ夫々 dx, dy, dz ナル微小直六面體ヲナス流體ノ部分ヲ考フ、



分速度ヲ u, v, w トスレバコノ部分ノ運動量ガ x 軸ノ方向ニ增

1. 流体中ノ一部ハ如何ナル経路ヲ運動スルカ.

2. 一点ノ速度圧力等ガ時間ト共ニ如何ニ変化スルカ.

加スル割合ハ $\rho\, dx\, dy\, dz\dfrac{du}{dt}$ ニシテ是ガ此ノ部分ニ働ク合力ノ x 軸ノ方向ノ分値ニ等シ、而シテ外力ノ x 軸ノ方向ノ分力ハ $\rho\, dx\, dy\, dz\,\mathrm{X}$ ナリ、又 yz 平面ニ平行ナル面 A′BDC ニ於テノ全壓力ハ $\left(p-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\, dz$ ニシテ其ノ向側ノ面 AB′D′C′ ニ於ケル全壓力ハ $-\left(p+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\, dz$ ナリ、其等ノ代數和 $-\dfrac{\partial p}{\partial x}dx\, dy\, dz$ ガ x 軸ノ正ノ方向ニ働ク、故ニ次ノ關係ヲ得、

$$\rho\, dx\, dy\, dz\frac{du}{dt}=\rho\, dx\, dy\, dz\,\mathrm{X}-\frac{\partial p}{\partial x}dx\, dy\, dz$$

$$\therefore\quad \frac{du}{dt}=\mathrm{X}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

同様ニシテ

$$\frac{dv}{dt}=\mathrm{Y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dw}{dt}=\mathrm{Z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$u=\dfrac{dx}{dt},\ v=\dfrac{dy}{dt},\ w=\dfrac{dz}{dt}$ ナルヲ以テ

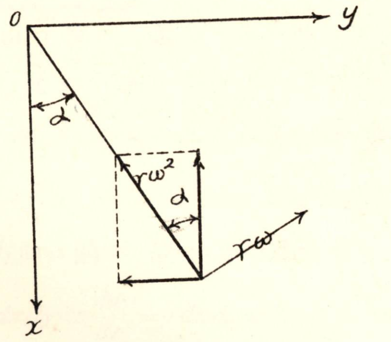
$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{dv}{pt}&=\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{dw}{dt}&=\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (10.1)$$

之等ガ Euler ノ運動方程式ナリ、

〔**例題 1**〕 鉛直軸ノ周リニ一様ナル角速度 ω ニテ廻轉スル容器内ニアル液體ノ自由表面, 等壓面如何、

鉛直軸ヲ z 軸ニトリ上方ヲ正ノ方向トシ, x, y 軸ヲ水平面上ニトル、任意ノ點 (x, y, z) ニ於テノ加速度ハ

[單位質量ニ働ク外力ノ分力ヲ X Y Z トス]



$$\frac{du}{dt}=-r\,\omega^2\cos\alpha=-\omega^2 x$$

$$\frac{dv}{dt}=-r\,\omega^2\sin\alpha=-\omega^2 y$$

$$\frac{dw}{dt}=0$$

ナリ、又外力ノ座標軸ノ方向ノ分力ハ

$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=-g$$

ナリ、故ニ運動方程式ハ

$$-\omega^2 x=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ -\omega^2 y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad 0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)-\omega^2(xdx+ydy)+gdz=0$$

之ヲ積分シテ次ノ式ヲ得

$$\frac{p}{\rho}-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+gz=\text{const}\equiv C$$

$p=p_1$ ナル等壓面ヲ表ハス方程式ハ $\left(-\frac{p_1}{\rho}+C\equiv C_1\right)$

$$gz-C_1=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

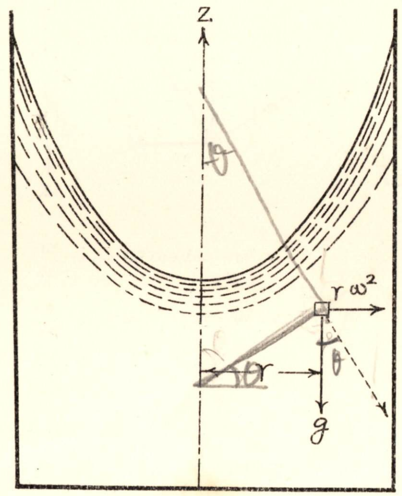
等壓面ト廻轉軸トノ交點ハ $\left(0,0,\frac{C_1}{g}\right)$ ナリ、等壓面ハ夫ト廻轉軸トノ交點ヲ頂點トスル廻轉拋物線曲面ナリ、

大氣壓ヲ p_0 トスレバ自由表面ヲ表ハス方程式ハ $\left(-\frac{p_0}{\rho}+C\equiv C_0\right)$

$$gz-C_0=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

自由表面ハ等壓面ト同形ノ曲面ニシテ只其ノ頂點$\left(o, o, \frac{C_0}{g}\right)$ヲ異ニスルノミナリ、

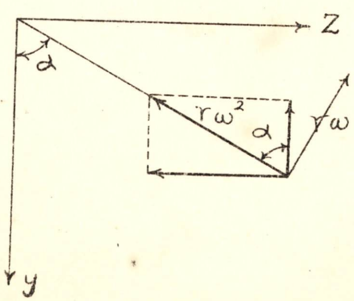
〔**注意**〕 D'Alembert's principle ヲ適用シテ此ノ問題ヲ靜力學的ニ解クコトヲ得、「力學卷ノ二第一四節參照」



即チ等壓面ハ重力ト遠心力トノ合力ノ作用線ト垂直ナリ、

（第二章第五節參照）

〔**例題 2**〕 水平軸ノ周リニ一樣ナル角速度 ω ニテ廻轉スル容器中ニ在ル液體ノ等壓面，自由表面如何、



$$\tan\theta=\frac{r\omega^2}{g}$$

$$\therefore \frac{dz}{dr}=\frac{r\omega^2}{g}$$

$$\therefore g\,dz=r\omega^2\,dr$$

$$\therefore gz=\frac{1}{2}r^2\omega^2$$

$$\therefore z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$$

水平ナル迴轉軸ヲ x 軸ニトリ，之ヲ垂直ナル水平方向ニ y 軸ヲ，鉛直上方ニ z 軸ヲトル、

液體ノ一點 (x, y, z) ニ於テノ加速度ハ

$$\frac{du}{dt}=0$$

$$\frac{dv}{dt}=-r\,\omega^2\cos\alpha=-r\omega^2\frac{y}{r}=-\omega^2 y$$

$$\frac{dw}{dt}=-r\omega^2\sin\alpha=-r\omega^2\frac{z}{r}=-\omega^2 z$$

ナリ、又外力ノ座標軸ノ方向ノ分力ハ

$$X=0 \qquad Y=0, \qquad Z=-g$$

ナルヲ以テコノ場合ノ運動方程式ハ

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ -\omega^2 y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},-\omega^2 z=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{dp}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)-\omega^2(ydy+zdz)+gz=0$$

之ヲ積分シテ次ノ式ヲ得

$$\frac{p}{\rho}-\frac{1}{2}\omega^2(y^2+z^2)+gz=\text{const}\equiv C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$p=p_1$ ナル等壓面ノ方程式ハ $\left(-\frac{p_1}{\rho}+C\equiv C_1\right)$

$$y^2+\left(z-\frac{g}{\omega^2}\right)^2=\frac{\sqrt{g^2-2C_1\omega^2}}{\omega^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

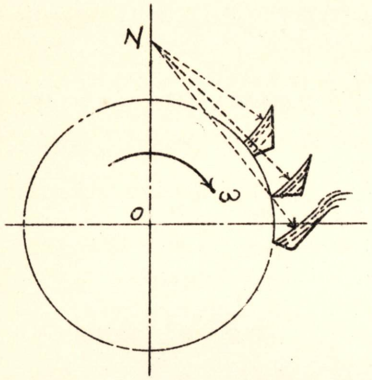
故ニ等壓面ハ $\left(0, 0, \frac{g}{\omega^2}\right)$ ヲ通ル水平軸（一定軸）ヲ有スル同軸ノ圓筒曲面ナルヲ知ル、

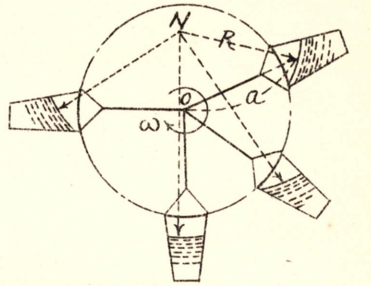
次ノ圖ノ如キ水車ノ場合ニ於テハ液面ノ迴轉軸ヨリノ距離ハ一定ナリ、之ヲ a トシ $y=h,\ z=k\ (a^2=h^2+k^2)$ ノ位置ニアル自由表面ノ方程式ハ

$$y^2+\left(z-\frac{g}{w^2}\right)^2=h^2+\left(\frac{g}{w^2}-k\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

即チ $N\left(0, 0, \frac{g}{\omega^2}\right)$ ヲ通ル水平軸ヲ軸トシ半徑 $R=\sqrt{h^2+\left(\frac{g}{w^2}-k\right)^2}$ ナル圓筒曲面ナリ、

其ノ曲面ノ半徑ハ考ヘル自由表面ノ位置即チ (h, k) ノ値ノ如何ニヨリテ異ナル、





又其ノ軸 (N) ハ角速度 ω ガ増大スルニ伴ヒテ廻轉軸 (O) ニ接近ス故ニ圓筒曲面ノ半徑 R ハ a ニ近キ値ヲトルニ至ル、

一一、Bernoulli ノ定理、

式 (10.1) ノ第一式ニ dx, 第二式ニ dy, 第三式ニ dz ヲ夫々乘ジテ相加フレバ

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

$$=\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz \quad \text{......................} \quad (\mathrm{i})$$

壓力 p ハ一般ニ x, y, z 及 t ノ函數ナルヲ以テ

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz+\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

$$\therefore \quad \frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt \quad \text{..................} \quad (\mathrm{ii})$$

今 $u^2+v^2+w^2=\mathrm{V}^2$ トスレバ

$$u\,du+v\,dv+w\,dw=\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz=\mathrm{V}.d\mathrm{V} \ \ldots \ (\mathrm{iii})$$

式 (i) ニ式 (ii) 及 (iii) ヲ代入スレバ

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz-\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)=\mathrm{V}.d\mathrm{V} \ \ldots\ (11.1)$$

壓力及運動狀態ガ同一點ニ於テハ時間的ニ變化ナキ運動ヲ定常運動 (Steady motion) トイフ、

コノ場合ニ於テハ $\frac{\partial p}{\partial t}=0$ ナルヲ以テ

$$\boxed{\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz-\frac{dp}{\rho}=d\left(\frac{1}{2}\mathrm{V}^2\right)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11.2)$$

コレヲ積分スレバ「エネルギー」ノ方程式ヲ得ベシ、

今外力ガ重力ノミノ場合ヲ考ヘン、

鉛直上方ヲ z 軸トスレバ

$$\mathrm{X}=0,\ \mathrm{Y}=0,\ \mathrm{Z}=-g$$

ナルヲ以テ式 (11.2) ハ次ノ如クナル、

$$gdz+\frac{dp}{\rho}+d\left(\frac{1}{2}\mathrm{V}^2\right)=0$$

之ヲ積分シテ次ノ式ヲ得

$$gz+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{\mathrm{V}^2}{2}=\mathrm{const}\equiv\mathrm{C} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11.3)$$

比重量ヲ γ トシ, 壓力ノ單位ヲ重力單位ニ直セバ (V ヲ v ト書キ直ス)

$$\boxed{z+\int\frac{dp}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\mathrm{H}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11.3')$$

茲ニ H ハ常數ニシテ [L] ナル Dimention ヲ有ス、

此ノ式ヲ Bernoulli ノ式トイフ、

液體ノ場合ニハ γ ガ一定ナリト見做シ得ベキヲ以テ Bernoulli ノ式ハ次ノ如クナル、

$$\boxed{z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\mathrm{H}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (11.3'')$$

1. P ノ力ノ單位ヲ重力單位ニアラタメル
2. ρ ヲ γ (比重量) ニアラタメル

$\int\frac{dp}{\rho}$ ノ p ハ力ノ絶対単位ヲ以テ $gz+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C$ ノ式ヲ以テ決定セラレル. 故ニ P ヲ重力単位デ決定セントスルナラバ 他ノ[illegible]項ヲ g デ割ラナケレバナラナイ.

例ヘバ $G=a\,g$

$\downarrow$

$G=\frac{a}{1000}\,kg.$

今單位時間ニ流レル液ノ全容積ヲ $Q^{m^3/sec}$ トスレバ單位時間ニ流レル液ノ全質量ハ $\gamma Q^{kg/sec}$ ナリ、

之ヲ Bernoulli ノ式ノ各項ニ乘ズレバ

$$\gamma Qz+\gamma Q\frac{p}{\gamma}+\gamma Q\frac{v^2}{2g}=\gamma QH$$

此ノ式ノ第一項 γQz ハ水平面 xy ヨリ高サ z ノ位置ニ於テ有スル位置ノ「エネルギー」、第二項 pQ ハ壓力ニヨル「エネルギー」第三項 $\gamma Q\frac{v^2}{2g}$ ハ運動ノ「エネルギー」ナリ、從ツテ右邊ハ全「エネルギー」ナリ、

水力學ニ於テハ 1kg ノ液ガ有スル「エネルギー」ヲ**水頭**(Head) ト稱スルヲ通例トス、サレバ上ノ式ニ $\gamma Q=1$ kg ト置ケバ

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=H$$

トナリ、此ノ式ニ於テノ z ヲ**位置水頭**, $\frac{p}{\gamma}$ ヲ**壓力水頭**, $\frac{v^2}{2g}$ ヲ**速度水頭**トイヒ、H ヲ**全水頭**トイフ、而シテ上ノ式ノ各項ハ z ト同ジク [L] ナル Dimention ヲ有ス、

液體ガ定常運動ヲナス場合ニハ「各位置ニ於ケル位置水頭, 壓力水頭, 及速度水頭ノ和ハ常ニ一定ニシテ其ノ値ハ全水頭ニ等シ」之ヲ Bernoulli ノ定理トイフ、

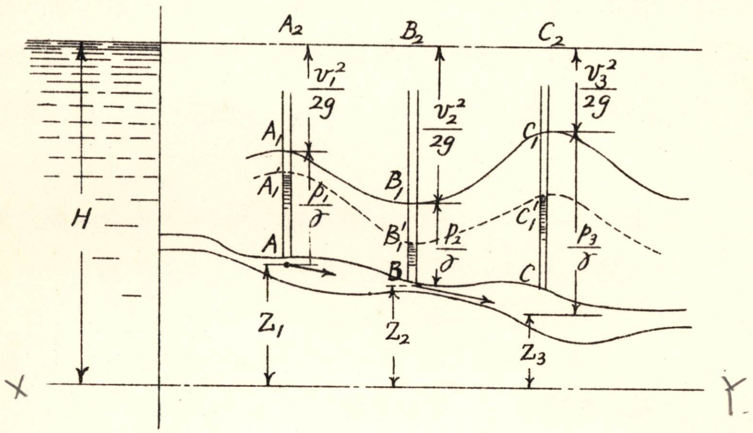
一二、水力勾配線、

一ツノ定常ノ流動ニ於テ次ノ圖ノ如キ流管 ABC ニ就キテ考フ、

其ノ流管ノ三點 A, B, C ノ水平面 XY ヨリノ高サヲ夫々 z_1, z_2, z_3 トシ其等ノ點ニ於テノ速度ヲ夫々 v_1, v_2, v_3 トシ、壓力ヲ夫々

p_1, p_2, p_3 トス、

今此等ノ點ニ上端ノ開放セル細管ヲ鉛直ニ立ツレバ液ハ管内ニ昇リテ其ノ高サハ夫々 AA_1, BB_1, CC_1 トナル、其等ノ高サハ夫々



$\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}, \frac{p_3}{\gamma}$ ニ等シ、更ニ $\frac{v_1^2}{2g}, \frac{v_2^2}{2g}, \frac{v_3^2}{2g}$ ヲ計算シテソレ等ノ値ニ等シク夫々 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ヲトレバ其等ノ上端 A_2, B_2C_2 ハ XY ニ平行ナル水平面上ニ存在シ，ソノ高サハ全水頭 H ニ等シ、即チ

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}=z_3+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{v_3^2}{2g}=H$$

斯クノ如キ細管ヲ流管ニ沿ヒテ無數ニ立テソレ等ノ管中ニ昇ル水面ヲ順次ニ連結スレバ $A_1 B_1 C_1$ ノ如キ空間曲線ガ出來ル、此ノ曲線ヲ水力勾配線 (Hydraulic gradient) トイフ、

一三、抵抗ヲ加算シタル Bernoulli ノ式

今迄ニ求メタル運動方程式ハ流體ノ運動ニ對シテ抵抗ナシトシテ得タルモノナリ、

運動ニ對シテ抵抗ガ働キ其ノ爲ニ運動ノ「エネルギー」タル速度水頭ニ影響シ「エネルギー」ノ消耗ヲ來ス、其ノ結果ハ壓力ヲ下ゲルコトニナル、例ヘバ流體ノ抵抗ノタメニ流管 A, B 間ニ於テ（前節ノ圖）質量 1 kg ニツキ h_1 kg-m ノ「エネルギー」ヲ消耗シタリトスレバ h_1 ヲ A, B 間ニ於ケル抵抗水頭 (Head due to hydraulic resistance) ト云フ、即チ B ニ於ケル壓力水頭ガ $\frac{p_2}{\gamma}$ ヨリ h_1 丈ケ減少ス、

流管ノ B, C 間ニ就キテ考ヘテモソノ間ニ於ケル抵抗水頭ヲ $h_2 m$ トスレバ之ト同様ノ結果ヲ來ス、

サレバ抵抗ヲ加算シタル實際ノ水力勾配線ハ $A_1 B_1 C_1$ ニ非ズシテソレヨリモ順次下方ニ遠ザカル $A_1 B_1' C_1'$ ノ如キモノニテ $B_1'B_1 = h_1$, $C_1' C_1 = h_1 + h_2$ ナリ、

依ツテ抵抗水頭ヲ加算シタル實際ノ Bernoulli, ノ式ハ次ノ如クナル、即チ

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_1 = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + h_1 + h_2$$

斯クノ如ク流體抵抗ハ下流ニ到ルニ從ヒ次第ニ增大スルモノナレバ之ヲ一般式ニ表ハスニハ流レニ沿ヒテ任意ノ二點間ニ働ク抵抗水頭ヲ h ニテ表ハセバ

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h = \mathrm{H}$$

之ヲ流體抵抗ヲ加算シタル Bernoulli ノ式トイフ、

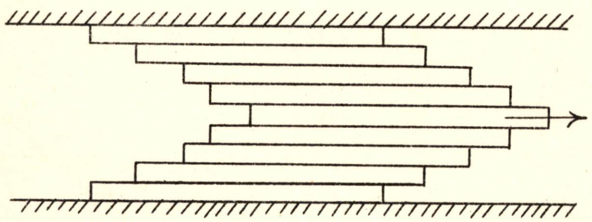
第四章

層流ト混流

一四、層流ト混流、

流體ノ運動ヲ大別スレバ流動 (Flow) ト波動 (Wave motion) トノ二ツトナル、流動ヲ更ニ層流ト混流トノ二ツニ區別ス、

流體ノ各分子ノ畫ク流線ガ曲線又ハ直線ヲナシテ夫等ガ整然ト排列スル如ク流動スルトキ其ノ流動ヲ流線運動 (Stream line motion) トイフ、コノ場合ニハ流體ハ整然タル層ヲナシテ恰モ圖ノ模型ノ示ス如キ狀態ニテ流レルカラ斯クノ如キ流動ヲ層流 (Laminar flow) トモイフ、



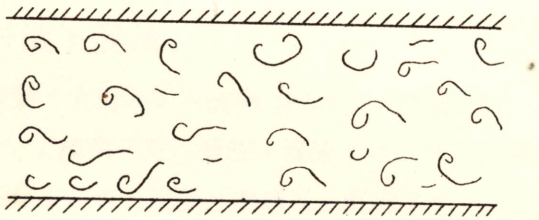
コノ如キ流動ハ流レノ幅ガ狹ク速度ガ小ナル場合ニ限ラレル、自由表面ヲ有スル液體ナレバ液面ガ鏡面ノ如ク完全ニ平滑ナリ、

液面ガ多少ナリトモ波紋ヲ呈シ液體ガ流レテキルトノ觀ヲ與ヘルトキノ流動ハ既ニ層流ニアラズ、

如何ニ少ナル面積ヲ取ッテモ回轉運動ヲ行ハルノヲ渦ト云フ。
比較的安定ナモノヲ渦動ト云ヒ不安定ナモノヲ渦ト稱ス

流動ノ速度ガ或ル大サ以上ナルトキハ「流レ」ノ内部ニ無數ノ渦 (Eddy) ヲ生ジ流線ハ入リ亂レテ甚ダ不規則ニシテ且ツ不安定ナル狀態トナル、次ノ圖ノ示スガ如シ、

斯クノ如キ流動ヲ混流 (Turbulent flow) 又ハ亂レ運動 (Turbulent motion) トイフ、

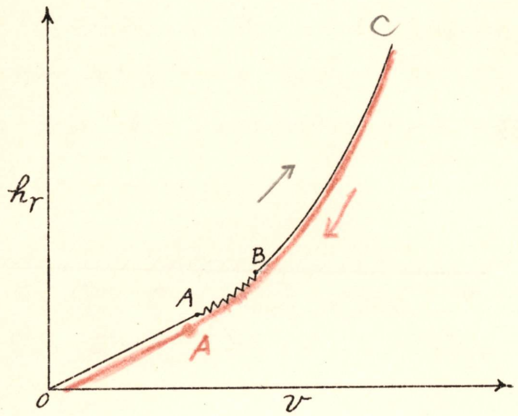


一五、限界速度、

層流ノ場合ニハ流體ノ抵抗ハ層ト層ト相對運動ニヨリテ生ズル流體ノ内部ノ粘性ニ基ク所謂内部抵抗ノミナリ、サレド混流ノ場合ニハ層ト層トノ相對運動ニヨリテ生ズル抵抗ノミナラズ、渦ノ發生ニヨリテ其ノ廻轉運動ハ本來ノ流線ヲ著シク混亂サセ廻轉流動ノ加速度及負ノ加速度ガ更ニ抵抗ヲ與ヘル、サレバ混亂ノ場合ニハ層流ノ場合ニ比シテ遙カニ大ナル流體ノ抵抗ヲ發生ス、

今斷面一樣ナル直管ヲ水平ニ置キテ水力勾配線ヲ檢スルニ層流ノ場合ニハ抵抗水頭ハ流レノ速度ニ比例シテ增セドモ混流ノ場合ニハ其ノ速度ノ n 乘ニ比例シテ增スコトトナル、

コノ實驗ヨリ得タル速度 v ト抵抗水頭 h_r トノ關係ハ次ノ圖ノ通リトナル、v ガ o ヨリ次第ニ增スト之ニ大凡比例シテ h_r ガ增シテ A ニ達シ急ニ h_r ガ不安定ノ狀態トナル、暫時ニシテ B ニ



達シソレヨリ後ハ安定トナル、v ノ增加ニ伴ヒ h_r ノ增加ノ割合ガ大トナリテ大約 v ノ二乘ノ割合ニテ增加ス、即チ OA ノ部ハ大畧直線ナレド BC ノ部ハ拋物線ニ近似セル曲線トナル、OA ハ層流ノ狀態ニシテ B 以後ハ混流ノ狀態トナル、コノB點ニ相當スル流レノ速度ヲ限界速度 (Critical velocity) トイフ、上ト反對ニ流レガ初メニ混流ノ狀態ニアリシモノカ速度ヲ次第ニ減ジテ零ニ至ラシメル場合ニ層流ニ變ズル限界ノ點 A ハ上ノ場合ニ比シ幾分原點 O ニ近キ所ニアル如シ、從ツテ層流ヨリ混流ニ移ル限界速度ト混流ヨリ層流ニ移ル限界速度トハ異ナル、限界速度ニ二種アリテ前者ヲ高限界速度トイヒ，後者ヲ低限界速度トイフ、

一六、Reynolds 數

Reynolds ハ管中ヲ粘性流體ガ流レル場合ノ抵抗ニ關シテ研究セリ、夫ニヨレバ「管ノ直徑ヲ d, 流體ノ平均速度ヲ v, 其ノ動性

一般ニ限界速度トイフハ低限界速度ヲ示ス.

粘性係數ヲレトスレバ流動ニ對スル抵抗ハ $\frac{vd}{\nu}$ ナル數ノ函數ニテ表ハサル、」

$\frac{vd}{\nu}$, Dimention ハ $\left[\frac{vd}{\nu}\right]=\frac{[LT^{-1}][L]}{[L^2T^{-1}]}=1$ ナリ、即チ Dimention ヲ有セザル無名數ニシテ如何ナル單位ヲ用フルモ同一ノ數ヲ與フ、コノ $\frac{vd}{\nu}$ ヲ **Reynolds** 數トイフ、

管ノ實驗ニ於テ流レノ速度ヲ增セバ「Reynolds 數」ハ增加シ最初層流ナリシモノガ「Reynolds 數」ヲ增加シテアル値ニ達スレバ急ニ混流ガ始マル、「コノ混流ガ始マルトキノ「Reynolds 數」, 又最初大ナル速度ヨリ次第ニ速度ヲ減ジテ混流ヨリ層流ニ移ル場合ニ層流ノ始マル時ノ「Reynolds 數」ハ流體ノ種類ヲ問ハズ流體ニ共通ナル數ナリ、」

コノ限界速度ニ相當スル「Reynolds 數」ヲ限界「Reynolds 數」トイフ、而シテ之ニ高限界「Reynolds 數」ト低限界「Reynolds 數」トノ別アルコトハ勿論ナリ、單ニ限界「Reynolds 數」トイヘバ低限界「Reynolds 數」ヲトルヲ通例トス、

直管中ヲ種々ノ流體ヲ流シテ實驗シタル結果ニヨレバ限界「Reynolds 數」ガ大約 2000 ナリ、即チ直管中ヲ流レル總テノ流體ハ $\frac{vd}{\nu}$ ガ 2000 ニ達シタルトキ混流ガ層流トナル、

今直管ノ流レノ限界速度ヲ v_c トスレバ

$$v_c=\frac{2000\nu}{d}$$

即チ「限界速度ハ動(性)粘性係數ニ比例シ, 管ノ直徑ニ反比例ス」、

第五章

流體ノ摩擦及流體ノ抵抗

一七、流體摩擦、

流體ノ流動ハ多クノ場合固體ノ導壁 (Guid surface) ニ沿ヒテ流レル、例ヘバ通路又ハ管中ヲ流體ガ流レル場合ニハ其ノ壁面ニ接觸スル流體微粒子ト之ニ隣接スル微粒子トノ間ニ相對速度ヲ生ジ從ツテ流體ノ粘性ニヨル抵抗ヲ呈シ之ニ抗シテ流動スルタメニハ「エネルギー」ノ損失ヲ伴フ、

斯クノ如キ摩擦ハ固體ト固體トノ接觸面ニ於テ生ズル所謂固體ノ摩擦トハ異ナル、固體壁面ニ沿ヒテ流體ガ流動スル際ニ生ヅル摩擦ヲ固體摩擦ト區別シテ流體摩擦ト稱ス、

流體內部ニ於テ流體ノ層ト層トノ間ニ相對速度ヲ生ズレバ粘性ニ基ク抵抗ヲ生ズ、之ヲ內部摩擦ト稱ス、

固體壁ノ周面ニ近接セル「境界層」ト稱セラレル薄キ層ニ於テノミ相對速度大ニシテ其ノ層外ニ於テハ速度ノ差ハ極メテ僅少ニシテ流體內部ニ於テハ速度ハ殆ド一樣ナリ、從ツテ境界層ニ於テ生ズル摩擦ガ主ニシテ層外ノ所謂內部摩擦ハ殆ドナシト考ヘラレル、而シテ境界層ノ厚ミハ壁面ノ粗滑ニ影響サレル即チ流體摩擦ハ粘性ニヨリテ生ヅルモノナレドモ壁面ノ粗滑ニ關係スルヲ以テ內部摩擦ト區別ス、

	面積	垂直圧力	面ノ粗滑
流体摩擦	比例	無関係	関係アリ
固体 〃	無関係	比例	関係アリ

$R = f S v^{n}$　　$n < 2$, $n \fallingdotseq 2$

$F = \nu N$

實驗ノ結果ニヨレバ流體摩擦ハ流體ト固體壁面ノ面積 S ニ比例シ，流レノ速度 v ノ n 乘ニ比例ス、流體摩擦力ヲ R トスレバ

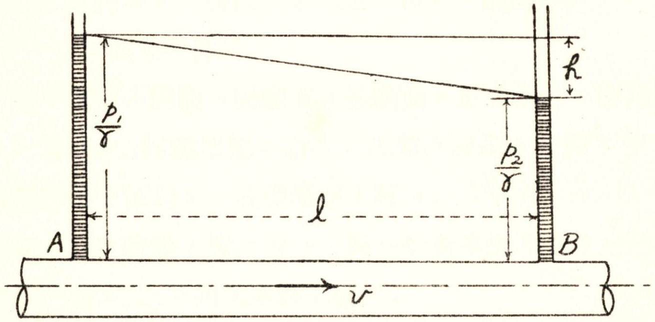
$$\boxed{R=fSv^n}$$

指數 n ハ壁面ノ粗滑ニヨルモノニシテ比例常數 f ハ流體ノ摩擦係數ニシテ接觸面ノ粗滑及流體ノ種類ニ關係ス、

又流體摩擦ハ固體摩擦ト異ナリ壓力ニ無關係ナリ、

一八、直管內ノ摩擦、

水平ニ置カレタル斷面一樣ナル直管ニ速度 v ヲ以テ水ヲ通シ，距離 l ナル二點 A, B ニ於テノ壓力ヲ測ル、然ルトキ A 點ニ於ケル壓力 p_1 ハ B 點ニ於ケル壓力 p_2 ヨリ大ナリ、此ノ壓力降下



ハ管ノ流體摩擦ニ基クモノナリ、管ノ斷面積ヲ A トスレバ (p_1-p_2) A ハ A, B 間ニ働ク流體摩擦力ヲ R トスレバ

$$R=(p_1-p_2)A=fSv^n$$

然ルニ

$$\frac{p_1-p_2}{\gamma}=h$$

$$\therefore \quad h=\frac{fSv^n}{\gamma A} \quad \cdots\cdots(18.1)$$

管ノ斷面ニ於テ水ニ接觸スル固體面ノ周圍ノ長サヲ P トスレバ S＝Pl ナリ、之ヲ上式ニ代入スレバ

$$h=\frac{fPlv^n}{\gamma A}$$

$\frac{A}{P}$ ヲ平均水深トイヒ，之ヲ m ニテ表ハスヲ通例トス、然ルトキハ

$$h=\frac{flv^n}{\gamma m} \quad \cdots\cdots(18.2)$$

總テノ流體ノ抵抗ハ「エネルギー」ヲ消耗セシモノナリ、サレバ流體抵抗ハ速度水頭ニ直接關係スルモノニシテ上ノ式ヲ書キ換フレバ

$$h=\frac{2glv^{n-2}}{\gamma}\frac{l}{m}\frac{v^2}{2g}=\frac{2gf}{\gamma v^{2-n}}\frac{l}{m}\frac{v^2}{2g}$$

$\frac{2gf}{\gamma v^{2-n}}\equiv f'$ ト置ケバ

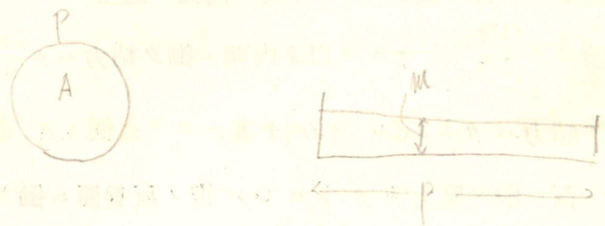
$$h=f'\frac{l}{m}\frac{v^2}{2g} \quad \cdots\cdots(18.3)$$

管ガ圓形トスレバ $A=\frac{\pi}{4}d^2$, $P=\pi d$ ナルヲ以テ $m=\frac{d}{4}$ ナリ、依リテ

$$h=4f'\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

更ニ $4f'=\lambda$ ト置ケバ

$$h=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \quad \cdots\cdots(18.4)$$

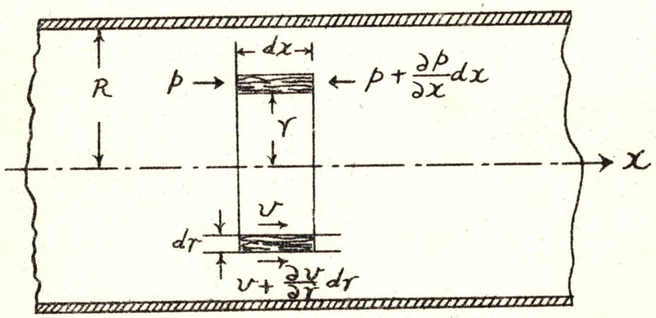


一九、直管内ニ於ケル平均流速、

水平ニ置カレタル直管ノ中ヲ流レル流體内ニ半徑 r, 長サ dx, 厚サ dr ナル圓環形ノ薄キ圓筒ヲトリ, 其ノ内面ノ速度ヲ v トスレバ外面ノ速度ハ $v+\frac{\partial v}{\partial r}dr$ ナルヲ以テ内面ニ働ク粘力ハ $\mu\frac{\partial v}{\partial r}$ ニシテ外面ニ働ク粘力ハ $\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(v+\frac{\partial v}{\partial r}dr\right)$ ナリ、

又圓環ノ一面ニ働ク壓力ヲ p トスレバ其ノ反對面ニ働ク壓力ハ $p+\frac{\partial p}{\partial x}dx$ ナリ、故ニ圓環ニ働ク全壓力ノ釣合ヲ考フレバ

$$2\pi r dr\left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]$$
$$=2\pi dx\left[r\mu\frac{\partial v}{\partial r}-(r+dr)\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(v+\frac{\partial v}{\partial r}dr\right)\right]$$



之ヲ簡約シ且ツ高次ノ微小量ヲ消却スレバ次ノ如クナル、

$$r\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

壓力ハ x ノ方向ニ於テノミ變化シ速度ハ半徑 r ノ方向ニ於テノミ變化スルヲ以テ

$$r\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)$$

壓力ハ A, B 二點ニ於ケル値ガ p_1, p_2 ニシテ直線的ニ降下スルトスレバ

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{p_1-p_2}{l} \qquad \text{但シ} \quad l=\overline{\mathrm{AB}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{r}{\mu}\,\frac{p_1-p_2}{l}$$

之ヲ積分スレバ

$$r\frac{dv}{dr}=-\frac{p_1-p_2}{2\mu l}r^2+\mathrm{C}_1$$

即チ

$$\frac{dv}{dr}=-\frac{p_1-p_2}{2\mu l}r+\frac{\mathrm{C}_1}{r}$$

更ニ積分シテ

$$v=-\frac{p_1-p_2}{4\mu l}r^2+\mathrm{C}_1\log r+\mathrm{C}_2$$

$r=0$ ニ於テ $\log r$ ハ $-\infty$ トナル、故ニ $\mathrm{C}_1=0$

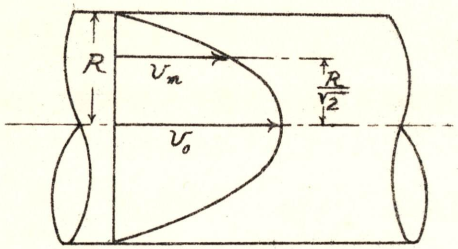
$$\therefore \quad v=-\frac{p_1-p_2}{4\mu l}r^2+\mathrm{C}_2$$

管壁ニ接觸スル流體ハ管壁ニ密著シテ靜止スルト考ヘラル、即チ $r=\mathrm{R}$ ニ於テ $v=0$

$$\therefore \quad \mathrm{C}_2=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}\mathrm{R}^2$$

$$\therefore \quad v=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}(\mathrm{R}^2-r^2) \quad \text{..............................(19.1)}$$

管ノ任意ノ横斷面ヲ流レル流體ノ速度ハ $r=0$ ナル軸上ニ於テ最大速度ヲ有シ、拋物線的ニ變化スル、



最大流速ヲ v_0 トスレバ

$$v_0=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}R^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19.2)$$

次ニ流量ヲ Q トスレバ

$$Q=\int_0^R 2\pi rv dr=\frac{\pi(p_1-p_2)}{2\mu l}.\int_0^R(R^2-r^2)rdr=\frac{\pi(p_1-p_2)}{8\mu l}R^4$$

故ニ平均流速ヲ v_m トスレバ

$$\left.\begin{aligned}v_m&=\frac{Q}{\pi R^2}=\frac{p_1-p_2}{8\mu l}R^2\\ v_0&=2v_m\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19.3)$$

平均流速ヲ與ヘル位置ハ式 (19.1), (19.2) ヨリ

$$\frac{p_1-p_2}{8\mu l}R^2=\frac{p_1-p_2}{4\mu l}(R^2-r^2)$$

$$\therefore \quad 2r^2=R^2 \quad 即チ \quad r=\frac{R}{\sqrt{2}}=0.707R \quad \cdots\cdots(19.4)$$

長サ l ノ間ニ起ル損失ヘッドヲ h トスレバ $h=\frac{p_1-p_2}{\gamma}$ ナルヲ以テ

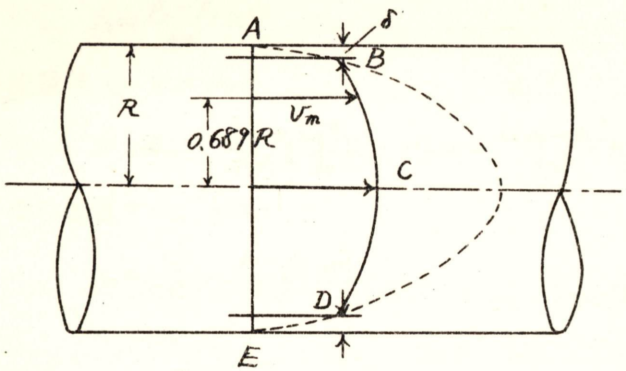
$$h=\frac{8\mu l v_m}{\gamma R^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19.1)$$

$2R=d,\quad \frac{\mu}{\gamma}=\frac{\nu}{g}$ ヲ用フレバ

$$h=\frac{32\nu l v_m}{gd^2} \quad \cdots\cdots\cdots(19.11)$$

混流ノ場合ニハ流線ガ入リ亂レル、大ナル速度ノ流線ガ小ナル速度ノ方ヘ又小ナル速度ノ流線ガ大ナル速度ノ方ヘ入リ亂レ同時ニ流體抵抗ガ大キク働ク結果速度ノ分布ガ相當ニ均一ニナル、

層流ナレバ次ノ圖ニ點線ニテ示セル拋物線的ノ分布ヲ呈スレドモ混流ノトキハ實線ニテ示セル如ク萎縮ス、



混流ナルガ故ニ層流ノ場合ノ如ク數學的ニ計算スルコト能ハズ、其ノ速度ノ分布ヲ實驗的ニ求ムル外ナシ、

管壁ニ接シテ δ ナル極メテ薄キ所謂境界層中ノ流レハ管壁ニ妨ゲラレ流線ガ入リ亂レズ層流ヲナス、其ノ部分ノ速度分布ハ拋物線狀ヲナス、

コノ境界面ハ極メテ薄キ層ナルヲ以テ之ヲ無視シテ BCD ノ混流ヲナス部分ニ就キテ考フコトトス、

混流部ノ速度分布ニ關シテ Darcy ガ實驗的ニ得タル公式ニヨレバ

$$v=v_0-\frac{k}{R}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{p_1-p_2}{l}} \quad \text{.........................(19.5)}$$

玆ニ k ハ實驗常數ニシテ m/sec. ノ單位ヲ以テスレバ $k=11.3$ ナル値ヲトル、

境界層ニ接スル所ノ速度ヲ v_1 トスレバ之ハ大凡 $r=R$ ノ所ノ速度ナルガ故ニ

$$v_1=v_0-k\sqrt{\frac{p_1-p_2}{l}} \quad \text{..........................(19.6)}$$

次ニ流量ヲ Q トスレバ

$$Q=\int_0^R 2\pi rvdr=\int_0^R 2\pi rvdr\left(v_0-\frac{k}{R}r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{p_1-p_2}{l}}\right)$$

$$=\pi R^2v_0{}^2-\frac{4}{7}\pi R^{\frac{5}{2}}\sqrt{R\frac{p_1-p_2}{l}}$$

故ニ平均流速ヲ v_m トスレバ

$$v_m=\frac{Q}{\pi R^2}=v_0-\frac{4}{7}k\sqrt{R\frac{p_1-p_2}{l}} \quad \text{.................(19.7)}$$

平均流速ニ等シキ速度ヲ以テ流レル流線ノ位置ヲ定ムルニハ v_m ノ値ヲ式 (19.5) ニ代入シテ r ヲ求ムレバヨシ、依ツテ

$$r^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{7}R^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad r=0.689\,R$$

二〇、流體ノ抵抗、

流體中ニ固體ガ運動スル時又ハ流動スル流體ノ中ニ固體ガ置カレタル時ニハ固體ト流體トノ間ニ相對速度ヲ生ジテソノタメ固體ハ抵抗力ヲ受ケル.

コノ抵抗力ハ種々ノ事情ニヨリテ生ズルモノナレド大體ニ於テ

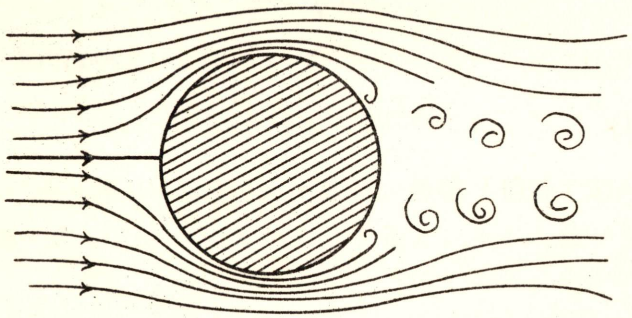
摩擦抵抗ト形狀抵抗トノ二種ノ抵抗力ノ合成ト考ヘルコトヲ得、

摩擦抵抗ハ流體摩擦ニヨリテ生ズルモノニシテ固體ガ流體ニ接觸スル表面積,其ノ面ノ粗滑狀態及流體ノ種類ニヨル、固體ノ形狀ニ關係ナキモノナリ、

之ニ反シ形狀抵抗ハ固體ノ形狀ニヨリテ其ノ前後兩端ニ於テノ壓力ノ差異ヲ生ジ夫ガタメ固體ノ運動ヲ阻止スル如キ抵抗ヲ與ヘル、故ニ形狀抵抗ハ壓力抵抗トモイフ、

形狀抵抗ニ就キテ詳述セン、

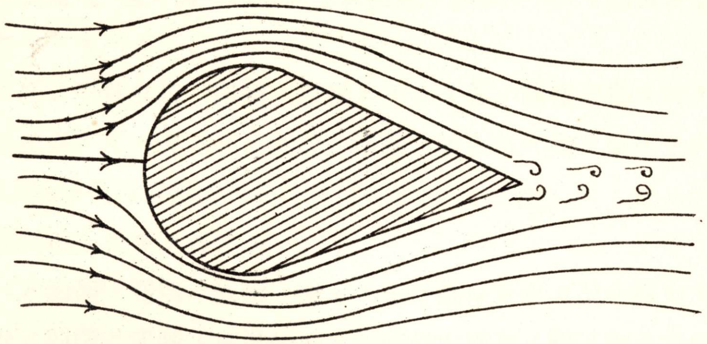
例ヘバ固體ノ圓壔ガ流體ノ流レノ中ニ置カレルカ又ハ靜止セル流體中ニ圓壔ガ運動スル場合ニハ流線ハ大様次ノ圖ノ如クナル、



物體ノ前端ニテハ流線ハ規則正シク排列スルサレド後端ニテハ流線ガ混亂シテ無數ノ渦ヲ生ジ其ノ渦ノ發生ノタメニ「エネルギー」ガ損失シテ壓力ヲ減少ス、ソレガタメ物體ノ前後兩端ノ壓力ノ差異ヲ生ジ物體ハ前方ヨリ後方ニ向ツテ壓セラレル結果トナル、運動スル物體ハ之ガタメ運動ト反對ノ方向ノ力ヲ受ケル、コノ抵抗ハ物體ノ形狀ニヨルモノナリ、

例ヘバ次ノ圖ノ如ク前端ガ圓壔狀ニシテ後端ノ尖レル物體ナレ

バ後端ニ發生スル渦ノ場ガ狭ク後端ニ於テ起ル壓力降下ノ影響少クソノタメ抵抗ハ小トナル、



物體ノ後端ガソノ周圍ヲ流ルル流線ノ形狀ニ適合シテ少シモ渦ヲ發セザル時ハ前後兩端ノ壓力ハ等シク從ツテ形狀抵抗ハ働カズ、コノ如キ場合ニハソノ物體ハ流線型ヲ呈スルトイフ、

二一、流體抵抗ノ總額、

流體中ニ運動スル物體ニ働ク流體ノ抵抗ノ總額ハ摩擦抵抗ト形狀抵抗トノ和ナリ、實驗ノ結果ニヨレバ夫ハ流體ノ密度 ρ ト運動方向ニ直角ナル物體ノ投射面積 F ト物體ト流體トノ相對速度 V トニ關係スルコトヲ知ル、

依ツテ流體抵抗ヲ R ニテ表ハセバ

$$R=\zeta\rho^x F^y V^z$$

トナスコトヲ得、但シ x, y, z ハ或指數ヲ表ハシ ζ ハ Dimention ナキ實驗係數トス、

R, ρ, F, V ノ Dimention ハ夫々 $[MLT^{-2}]$, $[ML^{-3}]$, $[L^2]$, $[LT^{-1}]$ ナ

リ、故ニ上ノ式ノ Dimention ノ關係ヲ示セバ次ノ如シ、

$$[MLT^{-2}]=[ML^{-3}]^x[L^2]^y[LT^{-1}]^x=[M^xL^{-3x+2y+z}T^{-2}]$$

左右兩邊ノ M, L, T ノ指數ハ夫々相等シカラザルベカラズ、

$$1=x,\quad 1=-3x+2y+z,\quad -2=z$$

$$\therefore\quad x=1,\quad z=2,\quad y=1$$

サレバ上ノ式ハ次ノ如クナル

即チ流體抵抗ハ速度ノ二乘ニ比例ス、種々抵抗ハコノ式ヲ基礎トシテ實驗的ニ ζ ノ値ヲ定メル、

コノ ζ ハ一般ニ Reynolds 數 $\frac{VL}{\nu}$ ノ或ル函數ナリ、(但シ L ハ物體ノ長サ, 幅又ハ厚サヲ表ハシ, ν ハ流體ノ動性粘性係數ナリ)、

特ニ摩擦抵抗ガ主ナル場合ニハ ζ ハ Reynolds 數ノ函數ニシテ物體ノ大サ, 流體ノ種類, 速度ニヨリテ其ノ値ハ異ナル、

サレド形狀抵抗ガ主ナル場合ニハ ζ ハ相似形ノ總テノ大サノ物體並ニ總テノ種類ノ流體ニ對シテ大凡或ル一定ノ値ヲ與ヘル、

第六章

相似比較則

二二、模型試驗ト比較則、

物ノ大小ニハ種々ノ別ガアリ其ノ形狀ニモ亦多種多樣ノモノアリ、其ノ大小及形狀ノ種々ナル多クノモノノ中各部寸法ガ幾何學的ニ相似ナル物ガアル場合ニハ此等ノ物ハ「形狀ガ同ジ」ナリトイフ、

實際ニ製作セントスル實物ト形狀ガ同ジクシテ大サ小ナルモノヲ模型(Model)ト稱スルコトトス、

形狀ノ同ジキモノガ流體中ニ運動スルカ又ハ流體ニ作用ヲナセバ夫等ニ依ツテ生ズル流線ノ形狀又ハ波ノ形狀等トノ間ニ因果關係ガアリテ一ヲ知レバ他ハ夫ニヨリテ推知シ得ルニアラザルカト考ヘラレル、

實際形狀ノ同一ナル物體ガ或ル速度ヲ以テ流體中ヲ運動スル時ハソノ運動ニヨツテ生ズル流線ノ形狀及波ノ形狀ガ相似ナルコトハ幾多ノ實驗ニヨリテ證セラレル、

斯クノ如ク兩者ノ間ニ存立スル種々ノ科學的關係ヲ知リ得レバ大型實物ヲ試驗スル手數ト費用トヲカクル代リニ其ノ小型模型ヲ手輕ニ試驗スルコトニ依ツテ恰モ大型實物ヲ試驗スルト同一ノ結果ヲ推算シ得ルコトトナル、是ガ即チ「模型試驗」ノ効果ナリ、

模型試驗ヲ效果アラシメル「實物ト模型トノ間ニ存立スル科學的關係」ニ關スル法則ヲ「比較則」(Law of comparison) トモ「相似則」(Law of similitude) トモイフ、

サレバ此ノ相似比較則ヲ知ラントスルモノナリ、

二三、比較則原理、

抵抗ヲ加算シタル Bernoulli ノ式ニヨレバ

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+h_r=\mathrm{H}$$

抵抗ニヨリテ失ハレル水頭 h_r ハ速度水頭ニ直接關係スルモノナルヲ以テ $h_r=\zeta\frac{v^2}{2g}$ ト書クコトヲ得、但シ ζ ハ損失係數 (Coefficient of lost hcad) ナリ、而シテ壓力水頭 $\frac{p}{\gamma}$ ヲ h ニテ表ハセバ上ノ式ハ次ノ如クナル、

$$z+h+\frac{v^2}{2g}+\zeta\frac{v^2}{2g}=\mathrm{H}\quad\text{(i)}$$

二ツノ流レ 1 及 0 ガアル場合ニ前者ヲ符標 1 ヲ以テ後者ハ符標 0 ヲ以テ區別スルコトトスレバ其等ノ流レノ Bernoulli ノ式ハ夫々

$$z+h_1+\frac{v_1{}^2}{2g_1}+\zeta_1\frac{v_1{}^2}{2g_1}=\mathrm{H}_1,$$

$$z_0+h_0+\frac{v_0{}^2}{2g_0}+\zeta_0\frac{v_0{}^2}{2g_0}=\mathrm{H}_2$$

ナリ、今若シ此等ノ流動ガ幾何學的ニ相似ナリトスレバ即チ此等ノ流動ノ形狀ガ總テノ點ニ於テ完全ニ同樣ナリトスレバ二式ノ該當スル各項ガ比例シナケレバナラヌ、即チ

$$\frac{z_1}{z_0}=\frac{h_1}{h_0}=\frac{v_1^2g_0}{v_0^2g_1}=\frac{\zeta_1v_1^2g_0}{\zeta_0v_0^2g_1}=\frac{H_1}{H_0}$$

$g_1=g_0$ ナルヲ以テ

$$\frac{z_1}{z_0}=\frac{h_1}{h_0}=\frac{v_1^2}{v_0^2}=\frac{\zeta_1v_1^2}{\zeta_0v_0^2}=\frac{H_1}{H_0}\quad\text{.................(23.1)}$$

二ツノ流レニ於テ前者ハ後者ノ模型ナリトスレバ模型ト實物トノ間ニハ上ノ關係ガ成立ス、之ガ即チ比較則原理ナリ、

$\frac{z_1}{z_0}$ ハ模型ト實物トノ高サノ比即チ寸法ノ比ナリ、

$\frac{z_1}{z_0}=\lambda$ トスレバ

$$\frac{z_1}{z_0}=\frac{h_1}{h_0}=\frac{H_1}{H_0}=\lambda$$

即チ形狀ノ同一ナル流レニアリテハ壓力水頭並ニ全水頭ノ比ハ寸法比ニ等シ、

二四、流體摩擦ト比較則、

前節ノ式 (23.1) ニ於テ

$$\frac{v_1^2}{v_0^2}=\frac{\zeta_1v_1^2}{\zeta_0v_0^2}$$

ガ成立ツタメニハ $\zeta_1=\zeta_0$ ナラザルベカラズ、

然ルニ流體摩擦ニ關スル式ニヨレバ

$$\zeta=f'\frac{l}{m}=\frac{2gf}{\rho v^{2-n}}\cdot\frac{l}{m}$$

故ニ $\zeta_1=\zeta_0$ ナルタメニハ

$$\frac{f_1l_1}{\rho v_1^{2-n}m_1}=\frac{f_0l_0}{\rho v_0^{2-n}m_0}$$

m_1 及 m_0 ハ何レモ平均水深ニシテ l 及 l_0 ハ長サナリ、流レガ

相似ナレバ

$$\frac{l_1}{m_1}=\frac{l_0}{m_0}$$

$$\therefore\quad \frac{f_1}{\rho_1 v_1^{2-n}}=\frac{f_0}{\rho_0 v_0^{2-n}} \quad\text{..............................(24.1)}$$

二ツノ流レガ相似ニシテ模型試驗ガ可能ナルタメニハ兩者ノ間ニコノ關係ガ成立シナケレバナラヌ、

然ルニ f, ρ 及 n ハ流體ノ種類, 流體ト固體トノ接觸面ノ粗滑狀態ニ關係シテ上ノ式ヲ滿足スル如キ模型試驗ハ到底不可能ナリ、

サレバ流體摩擦ニハ比較則ヲ適用スルコト能ハズ、即チ模型試驗ニヨツテ流體摩擦ヲ推定スルコト不可能ナリ、

二五、粘性ト比較則、

抵抗ニヨリテ損失サレル水頭 h_r ガ流體摩擦ニヨルモノニ非ズ、接觸面ノ粗滑ニ關係ナキ流體ノ內部抵抗即チ粘性ノミニ基因スルモノニ依ツテ生ズル損失水頭ハ次ノ如ク表ハサル、即チ

$$h_r=k\frac{\nu l v}{g d^2}$$

但シ k ハ係數, l ト d トハ長サ, 幅又ハ直徑ノ如ク長サノ寸法ヲ以テ表ハサルルモノナリ、依ツテ Bernoulli ノ式ハ次ノ如シ、

$$z+h+\frac{v^2}{2g}+k\frac{\nu l v}{g d^2}=\mathrm{H}$$

二ツノ流レガ相似ナラバ k ハコノ二ツノ流レニ共通ニシテ $\frac{l}{d}$ モ亦共通ナリ、故ニ第二三節ト同樣ニシテ次ノ關係ヲ得、

$$\frac{z_1}{z_0}=\frac{h_1}{h_0}=\frac{v_1^2}{v_0^2}=\frac{\nu_1 v_1 d_0}{\nu_0 v_0 d_1}=\frac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}}=\lambda \quad\text{..............(25.1)}$$

$$\therefore\quad \frac{v_1}{v_0}=\frac{\nu_1 d_0}{\nu_0 d_1} \quad 又ハ \quad \frac{v_1 d_1}{\nu_1}=\frac{v_0 d_0}{\nu_0} \quad\text{...................(25.2)}$$

$$\frac{v_1^2}{v_0^2}=\frac{\dfrac{32\nu_1 l_1 v_1}{g d_1^2}}{\dfrac{32\nu_0 l_0 v_0}{g d_r^2}}=\frac{\dfrac{\nu_1 v_1}{d_1}}{\dfrac{\nu_0 v_0}{d_r}}\cdot\frac{l_1}{l_0}\cdot\frac{d_0}{d_1}$$

$$\frac{v_1^2}{v_0^2}=\frac{\nu_1 v_1 d_0}{\nu_0 v_0 d_1}$$

$$\frac{v_1 d_1}{\nu_1}=\frac{v_0 d_0}{\nu_0}$$

$\frac{v_1 d_1}{\nu_1}$ 及 $\frac{v_0 d_0}{\nu_0}$ ハ二ツノ流レノ「Reynolds 數」ナリ、

故ニ上ノ式ハ其等ノ流レノ「Reynolds 數」ガ等シケレバ其等ノ流レハ全ク相似トナル、從ツテ模型試驗ハ可能ナリ、

摩擦抵抗ハ流體ト固體トノ接觸面間ニ發生スル所謂表面抵抗ニシテ之ニハ比較則ヲ適用シ得ズシテ模型試驗ニヨリテ實物ノ流レノ摩擦抵抗ヲ推算スルコト不可能ナリ、流體ノ粘性ノミニヨル內部抵抗ハ「Reynolds 數」ヲ等シクスルコトニヨリテ比較則ヲ適用シ得ルモノナリ、從ツテ模型試驗ヲ以テ實物ノ流レヲ推算シ得ベシ、

第七章

液體ノ波

二六、波ノ種類、

一般ニ波ハ物質ノ一部分ガ或ル原因ニ依ツテ其ノ平衡ノ位置ヨリ離レタル際之ヲ元ノ位置ニ復サントスル復元力ガ働キテ往復運動ガ繰リ返ストキニ生ズル現象ナリ、

液面特ニ海面ニ見ル波ハ其ノ原因ノ主ナルモノハ風ナリ、稀ニハ地震,海底噴火等ニヨルコトモアリ、

船舶ガ航行ノ跡ニ生ズル波ハ所謂 Ship wave ナリ、

其ノ復元力ハ液面ノ波ニ就キテハ重力ト表面張力トナリ、波長ガ二三糎程度ノ漣波ニテハ表面張力ノ作用ガ主ナルヲ以テ毛管波(Cappillary wave) トイフ、

波長ガ十糎以上ノ波ニテハ重力ガ其ノ主ナル復元力ナルヲ以テ之ヲ重力波 (Gravitational wave) トイフ、

此等ノ外ニ海底地震等ノ場合ニ生ズル波ハ水ノ體積彈性ガ其ノ復元力ナルガ故ニ海水ノ實質中ニ傳ハル彈性波ナリ、水中ノ音波ト同性質ノ粗密波ナリ、

普通ニ水面ニ見ル波ハ主トシテ重力波ナリ、茲ニハ重力波ノミ考ヘル、

重力波ヲ其ノ性質上振動性ノ波ト移動性ノ波トニ區別ス、

二七、振動性ノ波、

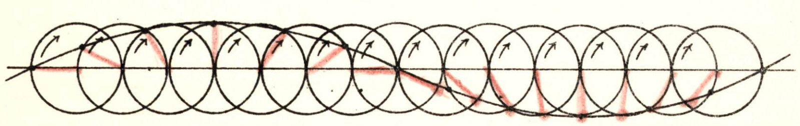
振動性ノ波ハ波ノ進行ニツレテ水ノ分子ガ極メテ小區域ニ於テ往復運動ヲナスノミニテ其ノ位置ヲ變ゼズ、連續スル水分子ガ次々ニ少シヅツ遲レテ同様ノ往復運動ヲ繰返セルニ過ギズ、

コノ波ハ其ノ波長ト水深トノ關係ニヨリテ其ノ性質ヲ異ニス、

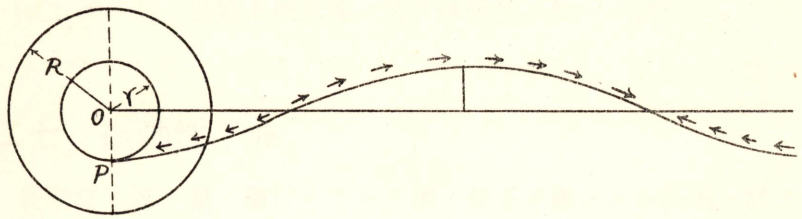
[I] 表面波、(Surface wave)

水深ニ較ベテ波長ノ極ク短キ波ハ其ノ運動ガ殆ド水面僅カニ限ラレ少シ深キ層ニ於テハ水分子ノ運動激減シ下ノ層ノ大部分ハ殆ド波ノ影響ナシ、故ニ斯クノ如キ波ヲ表面波トイフ、

大洋中ニ生ズル風浪ハコノ表面波ナリ，表面波ノ場合ニハ水ノ各分子ハ皆圓形軌道ヲ描イテ居ル、前方ノ分子ガ後方ノモノヨリ順次少シヅツ遲レテ圓運動ヲナスタメ水面ニ高低ガ出來ル、而シテ軌道圓ノ直徑ニ等シキ高サノ波ガ生ズル、其ノ模様ハ次ノ圖ノ示ス通リナリ、



今 O ヲ中心トシ半徑 R ナル圓板ガ水平面上ヲ轉ガルトスレバコノ板面上ノ一點 P ($\overline{OP}=r<R$) ノ描ガク軌跡ハ次ノ圖ノ如キ曲線ナリ、之ヲ Trochoid トイフ、



波長ガ $\lambda=2\pi R$ ニシテ水分子ノ軌道圓ノ半徑即チ波ノ高サ $H=2r$ ナル表面波ノ形狀ハ上ノ圖ノ如ク Trochoid トナル、

Trochoid ノ $r=R$ 極限ニ於テハ Cycloid トナル、

表面波ノ傳ハル速サ V ハ波長ノミニテ定マル即チ

$$V=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad \text{(27.1)}$$

表面波ガ如何ホドノ深サマデ影響スルカ、之ヲ知ルニハ波ノ高サ從ツテ軌道圓ノ直徑ガ深サト共ニ如何ニ減衰スルカヲ知レバヨシ、

深サガ增スニ伴ヒテ波ノ高サハ幾何級數的ニ激減スルコトガ理論的ニ知ラレル、

波長ヲ λ, 表面ニ於テノ波ノ高サヲ H_0 ナルトキ任意ノ深サ z ニ於テノ波ノ高サヲ H_z トスレバ

$$H_z=H_0e^{-2\pi z/\lambda} \qquad \text{(27.2)}$$

トナル、$\lambda=\frac{2\pi}{g}V^2$ ヲ代入スレバ

$$H_z=H_0e^{-\frac{gz}{V^2}} \qquad \text{(27.2')}$$

即チ深サガ波長ノ $\frac{1}{9}$ ヲ增ス毎ニ波ノ高サガ半減スル割合トナル、波長ニ等シキ深サニテハ波ノ高サハ表面ニテノ高サノ $\frac{1}{500}$ ニ足ラズ、

[II]　長　波、(Long wave)

水ノ深サニ較ベテ波長ノ頗ル長キ波ハ特ニ之ヲ「長波」ト稱スル、コノ波ハ表面波ト其ノ趣キヲ異ニシ波ノ影響ハ水底マデ及ブ、水分子ノ描ク軌道ハ扁平ナル橢圓形ニテ然モ其ノ鉛直ノ直徑即チ波ノ高サハ表面ヨリノ深サニ比例シテ減少シ水底ニテハ零トナル、サレド水平直徑從ツテ水分子ノ水平運動ハ表面モ下層モ殆ド變化ナシ、

長波ノ傳播速度 V ハ波長ニ關係ナク只水ノ深サ h ノミニテ定マル、即チ

$$V=\sqrt{gh}\qquad\cdots\cdots(27.3)$$

二八、波ノ傳播ト水分子ノ運動、

波ガ傳播ノ速サト水分子ノ實質ノ速サトハ全然別個ノモノナリ、

波形ハ前方ニ進行シテキルガ水ノ實質ハ圓又ハ橢圓ヲ描キテ僅カノ範圍內ニ於テ運動スルノミナリ、其ノ往復振動ハ波ノ山デハ波ノ進行ノ方向ニ前進ニシテ波ノ谷ニテハ波ノ進行ト反對方向ニ後退スル、

軌道上ニ於ケル水分子ノ實質ノ速サ v ハ波形ノ傳ハル速サ V ヨリ遙ニ遲シ、

表面波ニ於テハ其ノ波長ヲ λ $(\lambda=2\pi R)$ トスレバ最上層ノ水分子ニ就キテハ其ノ速サ v ハ

$$v : V = 2\pi r_0 : 2\pi R = \pi H_0 : \lambda$$

玆ニ $H_0=2r_0$ ニシテ r_0 ハ軌道ノ半徑ナリ、

$$\therefore \quad v=\frac{\pi H_0}{\lambda}V \text{ ....} (28.1)$$

下層ニ行クニ伴ヒテ波ノ高サハ減小スルト同一ノ割合ニテ水分子ノ速サハ激減スル、

長波ノ傳播速度ハ $\sqrt{gh}$ ナルガ故ニ水分子ノ山及谷ニ於テノ速サハ理論上次ノ如キ値ヲトルコトガ知ラレル、

$$v=\frac{H_0}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}=\frac{H_0}{2h}\sqrt{gh} \text{ ....} (28.2)$$