航空・宇宙

自衛隊奨学生（研究職技官）

選考試験問題

数学（多肢選択式）

（解答時間　１２０分）

注意事項

(1)　指示があるまで問題を開いてはいけません。
(2)　問題及び回答用紙に受験番号・氏名を記入してください。
(3)　問題の内容に関する質問には答えられません。
(4)　計算機等の使用は認められません。
(5)　７問のうち４問を選択し解答してください。
(6)　解答は解答用紙に鉛筆又はシャープペンシルで記入してください。

受　験　番　号	氏　　　　名

No. 1　次の行列Aに関して、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

（1）行列Aの固有値λ_1、λ_2、λ_3($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$)の組合せとして、最も妥当なのはどれか。

	λ_1	λ_2	λ_3
a.	-1	0	2
b.	-1	2	3
c.	0	1	2
d.	0	2	3
e.	1	2	3

（2）（1）で求めた固有値λ_1、λ_2、λ_3に対する固有ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{p_1}$、$\boldsymbol{p_2}$、$\boldsymbol{p_3}$とするとき、行列$P = (\boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2} \quad \boldsymbol{p_3})$として、最も妥当なのはどれか。ただし、$P$の第 2 行は、$(-2 \quad 1 \quad 2)$とする。

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（3）（2）のPの逆行列をP^{-1}とするとき、P^{-1}の2行2列の成分の値として、最も妥当なのはどれか。

a.　-1
b.　0
c.　1
d.　2
e.　3

（4）A^nの2行2列の成分の値として、最も妥当なのはどれか。

a.　$-2^{n+1}+2\cdot 3^n$
b.　$1-2^n+3^n$
c.　$2-3\cdot 2^n+2\cdot 3^n$
d.　$3-2^{n+1}+3^n$
e.　$5-3\cdot 2^n+3^n$

No. 2　3次元空間で水がホースの口から四方八方へ放射状に流れる場合において、わき出しを原点とし、原点から距離rの点における位置ベクトルを$\boldsymbol{r}(x, y, z)$、速度ベクトルを$\boldsymbol{v}(v_x, v_y, v_z)$とするとき、以下の問いに答えよ。

（1）$\nabla \boldsymbol{r}$ に等しいものとして、最も妥当なのはどれか。ただし、演算子∇は、以下の演算を表すものとする。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

a. $\dfrac{\boldsymbol{r}}{2r}$

b. $\dfrac{r\boldsymbol{r}}{2}$

c. $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

d. $\dfrac{2\boldsymbol{r}}{r}$

e. $r\boldsymbol{r}$

（2）単位時間のわき出し量をQとするとき、速度ベクトル$\boldsymbol{v}$に等しいものとして、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

b. $\dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

c. $\dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

d. $\dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

e. $\dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

（3）$\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$の値として、最も妥当なのはどれか。ただし、わき出しの原点を除くものとする。

a. $\dfrac{Q}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{2x^2}{r^5}\right)$

b. $\dfrac{Q}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}\right)$

c. $\dfrac{Q}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{2x^2}{r^5}\right)$

d. $\dfrac{Q}{2\pi}\left(\dfrac{2}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}\right)$

e. $\dfrac{Q}{\pi}\left(\dfrac{2}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}\right)$

（4）div $\boldsymbol{v}$の値として、最も妥当なのはどれか。ただし、わき出しの原点を除くものとする。

a. 0

b. $\dfrac{Q}{4\pi}$

c. $\dfrac{Q}{2\pi}$

d. $\dfrac{Q}{\pi}$

e. Q

No. 3　次の楕円体Ωに対して、3 重積分$I = \iiint_{\Omega} z^2 dxdydz$を考えるとき、以下の問いに答えよ。

$$\Omega = \left\{(x, y, z) | x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leqq 1\right\}$$

（1）変数変換　$x = u$、$y = 2v$、$z = 3w$をしたとき、ヤコビアン$J(u, v, w)$の値として、最も妥当なのはどれか。

a.　$\sqrt{6}$

b.　$\sqrt{14}$

c.　6

d.　14

e.　36

（2）（1）において、変数変換したときのIとして、最も妥当なのはどれか。ただし、Ωに対応するuvw空間の閉領域は、$V = \{(u, v, w) | u^2 + v^2 + w^2 \leqq 1\}$とする。

a.　$\sqrt{6} \iiint_{V} w^2 dudvdw$

b.　$6 \iiint_{V} w^2 dudvdw$

c.　$9 \iiint_{V} w^2 dudvdw$

d.　$36 \iiint_{V} w^2 dudvdw$

e.　$54 \iiint_{V} w^2 dudvdw$

（3）(u,v,w)を、次式のように球面座標(r,θ,φ)に変換するとき、ヤコビアン$J(r,\theta,\varphi)$の値として、最も妥当なのはどれか。

$$u = r\sin\theta\cos\varphi、v = r\sin\theta\sin\varphi、w = r\cos\theta$$

a. r^2

b. $r^2\cos\theta$

c. $r^2\sin\theta$

d. $r^3\cos\theta$

e. $r^3\sin\theta$

（4）3 重積分Iの値として、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{66}{5}\pi$

b. $\dfrac{66}{5}\pi$

c. 14π

d. $\dfrac{72}{5}\pi$

e. $\dfrac{74}{5}\pi$

No. 4　微分方程式に関する以下の問いに答えよ。

（1）yがxの関数であるとき、微分方程式$y' + y = 1$の解として、最も妥当なのはどれか。
ただし、Aは定数とする。

a.　Ae^{-x}

b.　$Ae^{-x} - 1$

c.　$Ae^{-x} + 1$

d.　$Ae^{x} - 1$

e.　$Ae^{x} + 1$

（2）次の微分方程式において、$u = \dfrac{y}{x}$とおくとき、$\dfrac{du}{dx}$として、最も妥当なのはどれか。

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

a.　$\dfrac{ux}{u^2 - 1}$

b.　$\dfrac{2ux}{u^2 - 1}$

c.　$\dfrac{u^2 - 1}{2ux}$

d.　$\dfrac{u^2 + 1}{2ux}$

e.　$\dfrac{1 - u^2}{2ux}$

（3）（2）の微分方程式の解として、最も妥当なのはどれか。ただし、Aは定数とする。

a.　$(x+A)^2 - y^2 = A^2$
b.　$(x+A)^2 + y^2 = A^2$
c.　$(x+A)^2 - 2y^2 = A^2$
d.　$(x+A)^2 + 2y^2 = A^2$
e.　$(x+A)^2 + 3y^2 = A^2$

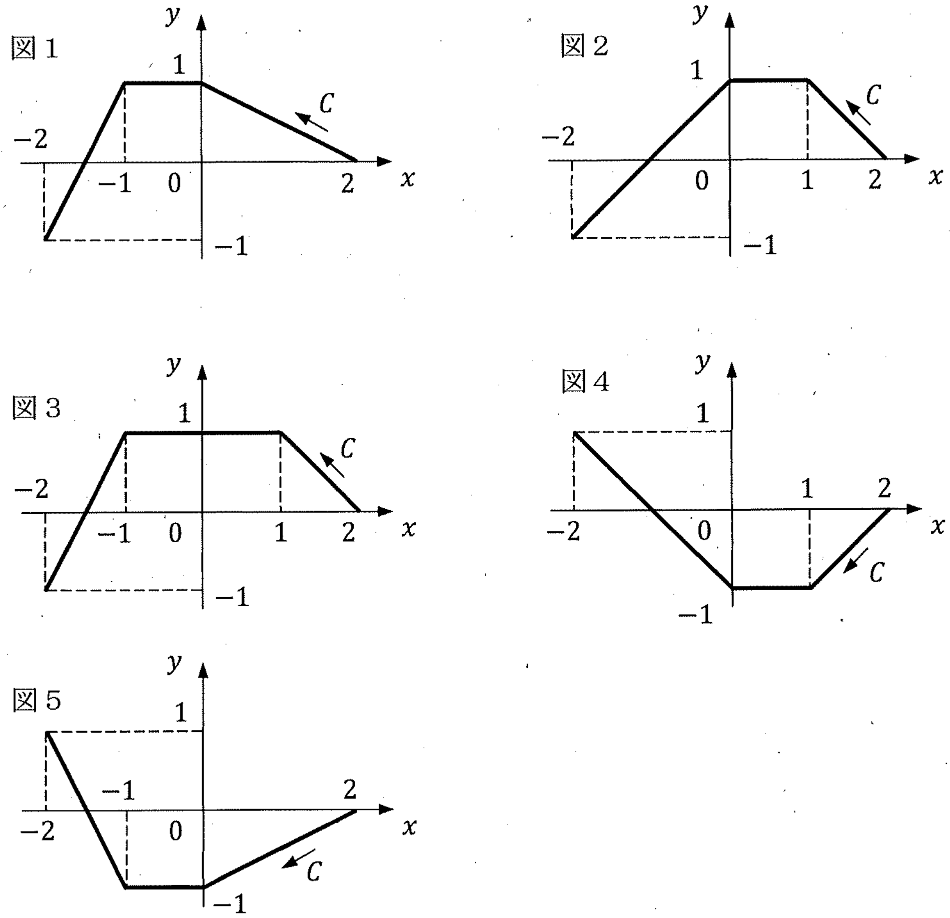
No. 5　次の曲線Cについて、以下の問いに答えよ。ただし、iは虚数単位とする。

$$z = 2-(1-i)t \ (0 \leqq t \leqq 1)$$

$$z = 2+i-t \ (1 \leqq t \leqq 2)$$

$$z = 4+5i-2(1+i)t \ (2 \leqq t \leqq 3)$$

（1）曲線Cを複素平面上に図示したものとして、最も妥当なのはどれか。



a.　図1

b.　図2

c.　図3

d.　図4

e.　図5

（2）次の定積分の値として、最も妥当なのはどれか。ただし、iは虚数単位とする。

$$(i-1)\int_0^1 e^{2-(1-i)t}dt$$

a.　$e^{i-1}-e^2$

b.　$e^{i-1}+e^2$

c.　$e^{i}-e^2$

d.　$e^{i+1}-e^2$

e.　$e^{i+1}+e^2$

（3）曲線Cにそって次の定積分を求めた値として、最も妥当なのはどれか。ただし、$t=0$を始点とする。

$$\int_C e^z dz$$

a.　$e^{-2-i}-e^2$

b.　$e^{-2+i}-e^2$

c.　$e^{-1-i}+e^2$

d.　$e^{-1+i}-e^2$

e.　$e^{-1+i}+e^2$

No. 6　2つの壺 A、B があり、A には赤球が 2 個、B には白球が 2 個入っている。それぞれの壺から 1 個ずつ球をとり出して交換して壺へ戻すことにする。いま、時刻 $t=0,1,2,\cdots n,\cdots$ で操作を行うとし、操作を行った直後の A の壺の中にある白球の数を確率変数 $X(t)$ とする。$X(t)$ のとりうる値は、0、1、2 のいずれかである。A の壺の中にある白球の数が 0 個の状態を x_1、1 個の状態を x_2、2 個の状態を x_3 とするとき、以下の問いに答えよ。

（1）時刻 $n-1$ の状態 x_i から操作を1回行い、時刻 n の状態 x_j へ移る遷移確率を p_{ij} としたとき、次の遷移行列 P として、最も妥当なのはどれか。

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$

（２）時刻$n-1$の状態x_iから 操作を2回行い、時刻$n+1$の状態x_jへ移る遷移確率をp_{ij}としたとき、次の遷移行列Pとして、最も妥当なのはどれか。

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

a. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{32} & \frac{13}{16} & \frac{3}{32} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

（3）この操作を無限にくり返したとき、A の壺の中に白球が 1 個もない確率をp_0、1 個ある確率をp_1、2 個ある確率をp_2とするとき、p_0、p_1、p_2の組合せとして、最も妥当なのはどれか。

	p_0	p_1	p_2
a.	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
b.	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
c.	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
d.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
e.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

No. 7　関数$f(x)$が、周期2πの周期関数で、次のようにフーリエ級数展開できるとき、以下の問いに答えよ。ただし、nは自然数とする。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

（１）a_nとb_nの組合せとして、最も妥当なのはどれか。

	a_n	b_n
a.	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$
b.	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$
c.	$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$
d.	$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$
e.	$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$	$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$

（２）次の２つの定積分の値の組合せとして、最も妥当なのはどれか。

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$$

	$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$	$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx$
a.	0	-4π
b.	0	-2π
c.	-4π	0
d.	-2π	0
e.	4π	0

（3）関数 $f(x) = x^2\ (-\pi \leqq x < \pi)$が、$f(x + 2\pi) = f(x)$によって周期的に拡張した関数であるとき、$f(x)$のフーリエ級数展開として、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \dfrac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right)$

b. $\dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 3x}{3} - \dfrac{\cos 4x}{4} + \cdots\right)$

c. $\dfrac{\pi^2}{3} - 2\left(\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \dfrac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right)$

d. $\dfrac{\pi^2}{3} - 2\left(\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 3x}{3} - \dfrac{\cos 4x}{4} + \cdots\right)$

e. $\dfrac{\pi^2}{3} + 2\left(\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \dfrac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right)$