航空・宇宙

# 自衛隊奨学生（研究職技官）

# 選考試験問題

## 数学（多肢選択式）

## （解答時間　１２０分）

**注意事項**

(1)　指示があるまで問題を開いてはいけません。
(2)　問題及び回答用紙に受験番号・氏名を記入してください。
(3)　問題の内容に関する質問には答えられません。
(4)　計算機等の使用は認められません。
(5)　７問のうち４問を選択し解答してください。
(6)　解答は解答用紙に鉛筆又はシャープペンシルで記入してください。

| 受　験　番　号 | 氏　　　　　名 |
|---|---|
| | |

No. 1　$x$、$y$に関する 2 次形式$F(x,y)=3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2$について、以下の問いに答えよ。
ただし、$x$、$y$は実数とする。

（1）2 次形式$F(x,y)$を表す行列$A$として、最も妥当なのはどれか。

a.　$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b.　$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c.　$\begin{pmatrix} 3 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$

d.　$\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

e.　$\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

（2）（1）の行列$A$の固有ベクトルを正規化したときのベクトル$\boldsymbol{p_1}$、$\boldsymbol{p_2}$の組合せとして、最も妥当なのはどれか。ただし、ベクトル$\boldsymbol{p_1}$の成分は、すべて正の数とし、ベクトル$\boldsymbol{p_2}$の 2 行目の成分は正の数とする。

| | $\boldsymbol{p_1}$ | $\boldsymbol{p_2}$ |
|---|---|---|
| a. | $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ |
| b. | $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ |
| c. | $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ |
| d. | $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ |
| e. | $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ |

（3）（2）のベクトル$\boldsymbol{p_1}$、$\boldsymbol{p_2}$に対し、行列$P$を$P = (\boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2})$とする。${}^tPAP$の行列として、最も妥当なのはどれか。ただし、${}^tP$は行列$P$の転置行列を表すものとする。

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（4）（3）の行列$P$に対し、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$としたとき、2 次形式$F(x, y)$として、最も妥当なのはどれか。

a. $4X^2$
b. $4Y^2$
c. $X^2 + 2Y^2$
d. $X^2 + 4Y^2$
e. $4X^2 + Y^2$

No. 2　2 つのベクトル$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$について、以下の問いに答えよ。ただし、直交座標の$x$、$y$、$z$軸の正の向きにとった単位ベクトル（基本ベクトル）をそれぞれ$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$とする。

（1）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$を、基本ベクトルを用いて表したとき、$\boldsymbol{j}$の成分として、最も妥当なのはどれか。

a.　$A_yB_y$

b.　$A_xB_z - A_zB_x$

c.　$A_xB_z + A_zB_x$

d.　$A_zB_x - A_xB_z$

e.　$A_zB_y - A_xB_y$

（2）$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$を、基本ベクトルを用いて表したとき、$\boldsymbol{j}$の成分として、最も妥当なのはどれか。

a.　$\dfrac{\partial A_y}{\partial y}$

b.　$\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}$

c.　$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} - \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

d.　$\dfrac{\partial A_z}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial z}$

e.　$\dfrac{\partial A_z}{\partial x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial z}$

（3） div rot $\boldsymbol{A}$の値として、最も妥当なのはどれか。

a. 0

b. 1

c. $A_x + A_y + A_z$

d. ${A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$

e. $A_x A_y + A_y A_z + A_z A_x$

（4） div$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$と等しいものとして、最も妥当なのはどれか。

a. $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}$

b. $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$

c. $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$

d. $\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}$

e. $\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$

No. 3　次の定積分について、以下の問いに答えよ。

$$I = \iint_R (1 - x^2y^2)dxdy \quad (R\text{は}x^2 + y^2 \leqq 1, 0 \leqq x, 0 \leqq y\text{の領域})$$

（1）$y$について先に積分を行った場合、$I$を表す式として、最も妥当なのはどれか。

a. $\displaystyle\int_0^1 \left\{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right\}dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 \left\{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right\}dx$

c. $\displaystyle\int_0^1 \left\{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right\}dx$

d. $\displaystyle\int_0^1 \left\{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{3}(1-x^2)^2\right\}dx$

e. $\displaystyle\int_0^1 \left\{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2}(1-x^2)^2\right\}dx$

（2）$x = r\cos\phi$、$y = r\sin\phi$ $(0 \leqq r \leqq 1$、$0 \leqq \phi \leqq \frac{\pi}{2})$ とおいたとき、次のヤコビアン$J$の値として、最も妥当なのはどれか。

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)}$$

a. $1$

b. $r$

c. $\sin\phi + \cos\phi$

d. $-\sin\phi + \cos\phi$

e. $r - \sin\phi + r\cos\phi$

（3）（2）の極座標変換を用いたとき、$I$を表す式として、最も妥当なのはどれか。

a. $\displaystyle\int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^4 \sin^4\phi)\, d\phi$

b. $\displaystyle\int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^4 \sin^2\phi \cos^2\phi)\, d\phi$

c. $\displaystyle\int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^4 \sin^4\phi)\, d\phi$

d. $\displaystyle\int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^4 \cos^4\phi)\, d\phi$

e. $\displaystyle\int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^4 \sin^2\phi \cos^2\phi)\, d\phi$

（4）$I$の値として、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{17\pi}{96}$

b. $\dfrac{19\pi}{96}$

c. $\dfrac{7\pi}{32}$

d. $\dfrac{23\pi}{96}$

e. $\dfrac{25\pi}{96}$

No. 4　次の微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \cdots ①$$

（1）①が完全微分型であるための必要十分条件として、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y}$

b. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

c. $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$

d. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

e. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \times \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$

（2）①の積分因子を$\mu$とする。$\mu$が$x$のみの関数であるとき、$\mu(x)$として、最も妥当なのはどれか。ただし、$M$は定数とする。

a. $M\exp\left[\int \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\right]$

b. $M\exp\left[\int \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\right) dx\right]$

c. $M\exp\left[\int \dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\right]$

d. $M\exp\left[\int \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\right]$

e. $M\exp\left[\int \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\right]$

（3）次の微分方程式の解として、最も妥当なのはどれか。ただし、$K$は定数とする。

$$(x^2 - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

a. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{y^3}{x^2} = K$

b. $-\dfrac{2}{x} + \dfrac{y^3}{x^2} = K$

c. $-\dfrac{3}{x} + \dfrac{y^3}{x^2} = K$

d. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y^3}{x^2} = K$

e. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{3y^2}{x^2} = K$

No. 5　正則関数$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$の実部$u(x,y)$が、$u(x,y) = ax^3 + bx^2y - 3xy^2 - y^3$で与えられるとき、以下の問いに答えよ。ただし、$i$は虚数単位とする。

（1）実定数$a, b$の値の組合せとして、最も妥当なのはどれか。

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| a. | $-1$ | $-3$ |
| b. | $1$ | $-3$ |
| c. | $1$ | $3$ |
| d. | $3$ | $-1$ |
| e. | $3$ | $1$ |

（2）$u(x,y)$に共役な調和関数$v(x,y)$として、最も妥当なのはどれか。ただし、C は任意の実定数とする。

a.　$-x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + \mathrm{C}$

b.　$-x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + \mathrm{C}$

c.　$-x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + \mathrm{C}$

d.　$-x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + \mathrm{C}$

e.　$-x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + \mathrm{C}$

（3）$u$と$v$からなる複素関数$f(z)$として、最も妥当なのはどれか。ただし、C は任意の実定数とする。

a.　$(1-i)z^3+iC$

b.　$(1+i)z^3+iC$

c.　$(2-i)z^3+iC$

d.　$(2+i)z^3+iC$

e.　$(1-2i)z^3+iC$

No. 6　確率密度が次の式で与えられる連続分布について、以下の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (0 < x, x > 0) \end{cases}$$

（１）$c$の値として、最も妥当なのはどれか。

a.　0.5

b.　1

c.　2

d.　2.5

e.　3

（２）$x$の平均の値として、最も妥当なのはどれか。

a.　$\frac{2}{15}$

b.　$\frac{1}{5}$

c.　$\frac{4}{15}$

d.　$\frac{1}{3}$

e.　$\frac{2}{5}$

（3）$x$の分散の値として、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{1}{18}$

b. $\dfrac{1}{9}$

c. $\dfrac{1}{6}$

d. $\dfrac{2}{9}$

e. $\dfrac{5}{18}$

（4）モーメント母関数として、最も妥当なのはどれか。

a. $\dfrac{1}{t^2}(e^t - t - 1)$

b. $\dfrac{1}{t^2}(e^t - 2t - 1)$

c. $\dfrac{2}{t^2}(e^t - t - 1)$

d. $\dfrac{2}{t^2}(e^t - 2t - 1)$

e. $\dfrac{3}{t^2}(e^t - 2t - 1)$

No. 7　関数$f(x)$が、周期$2\pi$の周期関数で、次のようにフーリエ級数展開できるとき、以下の問いに答えよ。ただし、$n$は自然数とする。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

（1）$a_n$と$b_n$の組合せとして、最も妥当なのはどれか。

| | $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|---|
| a. | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ |
| b. | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ |
| c. | $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ | $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ |
| d. | $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ | $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ |
| e. | $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ | $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$ |

（2）次の 2 つの定積分の値の組合せとして、最も妥当なのはどれか。

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$$

| | $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$ | $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$ |
|---|---|---|
| a. | $0$ | $-2\pi$ |
| b. | $0$ | $\pi$ |
| c. | $0$ | $2\pi$ |
| d. | $\pi$ | $0$ |
| e. | $2\pi$ | $0$ |

（３）関数 $f(x) = x\ (-\pi \leqq x < \pi)$が、$f(x+2\pi) = f(x)$によって周期的に拡張した関数であるとき、$f(x)$のフーリエ級数展開として、最も妥当なのはどれか。

a. $\frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$

b. $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$

c. $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$

d. $2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$

e. $2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$