

自衛隊奨学生（研究職技官）  
選考試験問題

数学（多肢選択式）  
（解答時間 120分）

## 注意事項

- (1) 指示があるまで問題を開いてはいけません。
- (2) 問題及び回答用紙に受験番号・氏名を記入してください。
- (3) 問題の内容に関する質問には答えられません。
- (4) 計算機等の使用は認められません。
- (5) 7問のうち4問を選択し解答してください。
- (6) 解答は解答用紙に鉛筆又はシャープペンシルで記入してください。

受 験 番 号	氏 名

## 【第1問題】

周期  $2\pi$  をもつ関数  $f(x)$  は、 $-\pi < x \leq \pi$  において、 $f(x) = \pi - |x|$  ( $-\pi < x \leq \pi$ ) の式で定義されており、この周期関数  $f(x)$  の複素フーリエ級数展開を、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

とするとき、次の (1) ~ (5) の問いに答えなさい。

(1)  $c_0$  の値として、正しいものは次のうちどれか。

1.  $-\frac{\pi}{4}$

2. 0

3.  $\frac{\pi}{4}$

4.  $\frac{\pi}{2}$

5.  $\pi$

(2)  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  のとき、 $c_n$  の式として、正しいものは次のうちどれか。

1.  $\frac{i}{n}$

2.  $-\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$

3.  $\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$

4.  $\frac{i\pi}{n} + \frac{1}{n^2\pi} \{1-(-1)^n\}$

5.  $\frac{i\pi}{n} - \frac{1}{n^2\pi} \{1-(-1)^n\}$

(3) 与えられた周期関数  $f(x)$  の実フーリエ級数展開を,  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  とする。  $n \geq 1$  のとき,  $a_n, b_n$  のそれぞれを  $n$  の式で表すと,

$$a_n = \boxed{\text{①}}, \quad b_n = \boxed{\text{②}} \quad \text{である。}$$

①に当てはまる式として, 正しいものは次のうちどれか。

1. 0

2.  $-\frac{1-(-1)^n}{n^2 \pi}$

3.  $-\frac{2\{1-(-1)^n\}}{n^2 \pi}$

4.  $\frac{1-(-1)^n}{n^2 \pi}$

5.  $\frac{2\{1-(-1)^n\}}{n^2 \pi}$

(4) 前問(3)の②に当てはまる式として, 正しいものは次のうちどれか。

1. 0

2.  $-\frac{1-(-1)^n}{n^2 \pi}$

3.  $-\frac{2\{1-(-1)^n\}}{n^2 \pi}$

4.  $\frac{1-(-1)^n}{n^2 \pi}$

5.  $\frac{2\{1-(-1)^n\}}{n^2 \pi}$

(5) 与えられた周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開を利用して次の無限級数を計算した結果として、正しいものは次のうちどれか。

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

1.  $\frac{\pi^2}{32}$

2.  $\frac{\pi^2}{16}$

3.  $\frac{\pi^2}{8}$

4.  $\frac{\pi^2}{4}$

5.  $\frac{\pi^2}{2}$

## 【第2問題】

[1] スカラー場を  $f(x, y, z) = z^2$  とし、曲面  $S$  を次のように定義する。

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = (z \geq 0)$$

このとき、面積分  $\iint_S f dS$  の値を求めたい。

$$r = r(\theta, \varphi) = (\sqrt{3} \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{3} \sin \theta \sin \varphi, \sqrt{3} \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

とすると、次の (1) ~ (3) の問いに答えなさい。

(1)  $\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}$  として、正しいものは次のうちどれか。

1.  $(3 \sin^2 \theta \cos \varphi) i + (3 \sin \theta \cos \theta) j + (3 \sin^2 \theta \sin \varphi) k$
2.  $(3 \sin \varphi \cos \varphi) i + (3 \sin^2 \theta \sin \varphi) j + 3(3 \sin^2 \theta \cos \varphi) k$
3.  $(3 \sin^2 \theta \sin \varphi) i + (3 \cos^2 \theta \cos \varphi) j + (3 \sin \varphi \cos \varphi) k$
4.  $(3 \sin^2 \theta \cos \varphi) i + (3 \sin^2 \theta \sin \varphi) j + (3 \sin \theta \cos \theta) k$
5.  $(3 \cos^2 \theta \sin \varphi) i + (3 \cos^2 \theta \cos \varphi) j + (3 \sin \theta \cos \theta) k$

(2)  $\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi}$  の大きさ  $\left| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right|$  として、正しいものは次のうちどれか。

1.  $3 \cos \theta$
2.  $3 \sin \theta$
3.  $3 |\cos \varphi|$
4.  $3 |\sin \varphi|$
5.  $3 \sin \theta \cos^2 \theta$

(3) 面積分  $\iint_S f dS$  の値として、正しいものは次のうちどれか。

1.  $2\pi$
2.  $4\pi$
3.  $6\pi$
4.  $8\pi$
5.  $10\pi$

[2] ベクトル場を  $F(x, y, z) = yi - zi + xk$  とし, 円柱らせんを表す曲線  $C$  を次のように定義する。

$$C: r(t) = (2\cos t)i + (2\sin t)j + (\sqrt{2}t)k \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

このとき, 線積分  $\int_C F \cdot dr$  の値を求めたい。次の (4) ~ (5) の問いに答えなさい。

(4)  $F \cdot \frac{dr}{dt}$  として, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $4\sin^2 t - 2\sqrt{2}t \cos t + 2\sqrt{2} \cos t$
2.  $-4\sin^2 t + 2\sqrt{2}t \cos t - 2\sqrt{2} \cos t$
3.  $-4\sin^2 t - 2\sqrt{2}t \cos t + 2\sqrt{2} \cos t$
4.  $4\cos^2 t + 2\sqrt{2}t \sin t - 2\sqrt{2} \sin t$
5.  $4\cos^2 t - 2\sqrt{2}t \cos t + 2\sqrt{2} \sin t$

(5) 線積分  $\int_C F \cdot dr$  の値として, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $4\sqrt{2} + 2\pi$
2.  $4\sqrt{2} - 2\pi$
3.  $-4\sqrt{2} + 2\pi$
4.  $-4\sqrt{2} - 2\pi$
5.  $2\sqrt{2} - 2\pi$

## 【第3問題】

〔1〕ある大学では、大学4年生に対して一般教養の試験の得点と数学の試験の得点の相関関係を調べることにした。どちらの試験も200点満点であり、10人だけが無作為抽出してそれぞれの得点を調べた結果、以下の表のようになった。このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。なお必要な場合は、右の統計数表を用いてもよい。

No.	一般教養	数学
1	168	170
2	168	175
3	169	171
4	171	175
5	173	173
6	173	177
7	176	175
8	179	179
9	181	180
10	182	175

(単位は点/200点満点)

(1) 無作為抽出した10人の標本から計算した標本相関係数(ピアソンの積率相関係数)の値として、妥当なものは次のうちどれか。

1. 0.66
2. 0.68
3. 0.70
4. 0.72
5. 0.74

(2) 母相関係数を $\rho$ とするとき、帰無仮説 $H_0$ を、「 $H_0$ :一般教養の得点と数学の得点との間に相関関係はない」とし、無相関性 $\rho=0$ の検定を行うことにした。

一般に、「帰無仮説 $H_0: \rho=0$ 」のもとで、大きさ $n$ の標本 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \cdots (x_n, y_n)$ にもとづく標本相関係数を $r$ とするとき、 $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ の検定統計量 $t$ の値は自由度 $n-2$ の $t$ 分布に従うことが知られている。無作為抽出した10人の標本を用いて母相関係数 $\rho$ についての検定問題「帰無仮説 $H_0: \rho=0$  対立仮説:  $\rho \neq 0$ 」に対する有意水準5%の両側検定を行い、帰無仮説の棄却域を考えた判断として、妥当なものは次のうちどれか。

1.  $|t| > 1.860$  となっているので、相関がある可能性がある。
2.  $|t| < 1.860$  となっているので、帰無仮説は保留される。
3.  $|t| > 2.306$  となっているので、相関がある可能性がある。
4.  $|t| < 2.306$  となっているので、帰無仮説は保留される。
5.  $|t| > 2.228$  となっているので、相関がある可能性がある。

(3) 一般教養の得点を説明変数  $x$  とし、数学の得点を目的変数  $y$  とするとき、10組の標本から求めた単回帰式として、最も近いものは次のうちどれか。

1.  $y=0.40x+98$

2.  $y=0.40x+100$

3.  $y=0.42x+100$

4.  $y=0.42x+102$

5.  $y=0.45x+102$

[2] 20点満点の数学の試験を20人の生徒が受験した。出席番号1～12の生徒12人の平均点は12点、分散は $\frac{32}{3}$ 、出席番号13～20の生徒8人の平均点は10点、分散は21であったという。このとき、次の(4)～(5)の問いに答えなさい。

(4) 20人の生徒の得点を $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ とするとき、これらの得点をそれぞれの二乗の値の平均

$$\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2$$

として、正しい値は次のうちどれか。

1. 139.4
2. 140.0
3. 140.6
4. 141.2
5. 141.6

(5) 20人の生徒の得点の分散の値として、最も近い値は次のうちどれか。

1. 14.3
2. 14.8
3. 15.3
4. 15.8
5. 16.3

## 【第4問題】

以下の対称行列Aについて、次の(1)～(4)の問いに答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 対称行列Aの固有値の説明として、正しいものは次のうちどれか。

1. 固有値は2, 5で, 5は固有方程式の2重解
2. 固有値は2, 5で, 2は固有方程式の2重解
3. 固有値は-2, 5で, -2は固有方程式の2重解
4. 固有値は-2, -5で, -5は固有方程式の2重解
5. 固有値は2, -5で, 2は固有方程式の2重解

(2)  $a, b$  を実数の定数, 固有値が固有方程式の2重解ではない方の固有空間を

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} s, s \text{ は任意の実数} \right\}$$

とするとき, 定数  $a, b$  の値として, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $a=1, b=0$
2.  $a=0, b=1$
3.  $a=1, b=1$
4.  $a=-1, b=1$
5.  $a=-1, b=-1$

(3)  $c, d$  を実数の定数, 固有値が固有方程式の2重解である方の固有空間を

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} t, s \text{ と } t \text{ は任意の実数} \right\}$$

とするとき,  $c, d$  の値として, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $c=1, d=0$
2.  $c=0, d=1$
3.  $c=1, d=1$
4.  $c=-1, d=1$
5.  $c=-1, d=-1$

(4) 問(2)で  $s=1$  としたときの固有ベクトルを  $p_1$  問(3)で  $s=1, t=0$  としたときの固有ベクトルを  $p_2$ , 問(3)で  $s=0, t=1$  としたときの固有ベクトルを  $p_3$  とし,  $u_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|}$ ,  $u_2 = \frac{p_2}{\|p_2\|}$  ( $\|p_1\|, \|p_2\|$  は,  $p_1, p_2$  の大きさ)によって  $p_1$  と  $p_2$  を正規化する。

また  $u_3$  は, グラムシュミットの直交化法により  $u_2$  と  $p_3$  から作ることができ,  $u_1, u_2, u_3$  のそれぞれを 1 列目, 2 列目, 3 列目の成分とする正規直交行列  $U = (u_1, u_2, u_3)$  を作る。このとき行列  $A$  は,  $U^{-1}AU$  によって対角化される。

$u_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  とするとき,  $v_3$  の値は次のうちどれか。

1.  $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$

2.  $v_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$

3.  $v_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

4.  $v_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

5.  $v_3 = \frac{3}{\sqrt{6}}$

## 【第5問題】

[1] 次の(1)～(2)の問いに答えなさい。

(1) 広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-4x^2} dx$ として、正しいものは次のうちどれか。

1. 1

2.  $\sqrt{\pi}$

3.  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4.  $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

5.  $\frac{\sqrt{\pi}}{8}$

(2) 広義積分 $\int_0^{\infty} x^2 e^{-4x^2} dx$ として、正しいものは次のうちどれか。

1.  $\frac{1}{8}$

2.  $\frac{\sqrt{\pi}}{16}$

3.  $\frac{1}{32}$

4.  $\frac{\sqrt{\pi}}{32}$

5.  $\frac{\sqrt{\pi}}{64}$

[2]  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$  で定まる陰関数  $y = y(x)$  について,  $y$  の極値を求めたい。次の

(3) ~ (5) の問いに答えなさい。

(3)  $\frac{dy}{dx}$  を  $x, y$  の式で表したものとして, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $\frac{x-2y}{x-y}$

2.  $\frac{x-2y}{x-3y}$

3.  $\frac{x-3y}{x-y}$

4.  $\frac{x-3y}{x-2y}$

5.  $\frac{x-y}{x-3y}$

(4)  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $x, y$  の式で表したものとして, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $\frac{16}{(x-2y)^3}$

2.  $\frac{24}{(x-2y)^3}$

3.  $\frac{16}{(x-3y)^3}$

4.  $\frac{24}{(x-3y)^3}$

5.  $\frac{32}{(x-3y)^3}$

(5)  $y$  の極大値と極小値について, 正しいものは次のうちどれか。

1. 極大値は  $\frac{5}{2}$ , 極小値は  $-\frac{5}{2}$

2. 極大値は  $\frac{9}{4}$ , 極小値は  $-\frac{9}{4}$

3. 極大値は 2, 極小値は -2

4. 極大値は  $\frac{7}{4}$ , 極小値は  $-\frac{7}{4}$

5. 極大値は  $\frac{3}{2}$ , 極小値は  $-\frac{3}{2}$

## 【第6問題】

$a, b$  を実数の定数とし、微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \cdots \textcircled{1}$  の基本解  $y_1, y_2$  が、

$y_1 = e^{-x} \cos x$  ,  $y_2 = e^{-x} \sin x$  であるとき、次の(1) ~ (5)の問いに答えなさい。

(1) 定数  $a, b$  の値の組で、正しいものは次のうちどれか。

1.  $a = -1, b = 1$
2.  $a = 1, b = -1$
3.  $a = -2, b = 2$
4.  $a = 2, b = -2$
5.  $a = 2, b = 2$

(2) 基本解  $y_1, y_2$  が一次独立であることを確かめるためには、ロンスキー行列式 (Wronski determinant)  $W[y_1, y_2]$  を計算する必要がある。ロンスキー行列式を計算した結果として、妥当なものは次のうちどれか。

1.  $e^{-x}$
2.  $e^{-2x}$
3.  $2e^{-x}$
4.  $2e^{-2x}$
5.  $e^{-2x} \cos^2 x$

定数  $a, b$  を問(1)で求めた値とするとき、微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 2e^{-x} \sin 2x \cdots \textcircled{2}$  の一般解は、 $\textcircled{1}$ の一般解に $\textcircled{2}$ の特殊解を加えたものである。A, Bを実数の定数とし、 $\textcircled{2}$ の特殊解  $y_0$  を、 $y_0 = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$  とするとき、実数の定数A, Bの値の組を求めたい。

(3)  $\frac{dy_0}{dx} = -y_0 + \boxed{\text{(ア)}}$  とするとき、(ア)に当てはまる式は、次のうちどれか。

1.  $e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
2.  $-e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
3.  $2e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
4.  $-2e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
5.  $4e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$

(4)  $\frac{d^2y_0}{dx^2} = -\frac{dy_0}{dx} - 4y_0 + \boxed{\text{(イ)}}$  とするとき、(イ)に当てはまる式は、次のうちどれか。

1.  $e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
2.  $-e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
3.  $2e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
4.  $-2e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$
5.  $4e^{-x}(B \cos 2x - A \sin 2x)$

(5) 実数の定数A, Bの値の組として, 正しいものは次のうちどれか。

1.  $A = -\frac{2}{3}, B = 0$

2.  $A = 0, B = -\frac{2}{3}$

3.  $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}$

4.  $A = -\frac{2}{3}, B = -\frac{1}{3}$

5.  $A = 0, B = \frac{2}{3}$

## 【第7問題】

次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) 次の複素積分の値として、正しいものは次のうちどれか。ただし、積分路は時計回りとする。

$$\int_C \frac{i \cos z}{z-2i} dz$$

$$C : |z-i|=2$$

1.  $\left(\frac{1}{e^2} + e^2\right)\pi i$
2.  $-\left(\frac{1}{e^2} - e^2\right)\pi i$
3.  $-\left(\frac{1}{e^2} - e^2\right)\pi$
4.  $-\left(\frac{1}{e^2} + e^2\right)\pi i$
5.  $-\left(\frac{1}{e^2} + e^2\right)\pi$

(2) 複素関数  $f(z) = \frac{1}{2(z-1)(z-3)}$  を、円環領域  $D: |z-3| > 2$  でローラン展開したとき、 $(z-3)^{-7}$  の

係数として、正しいものは次のうちどれか。

1. -16
2. 32
3. -64
4. 128
5. -256

(3) 次の定積分を計算した結果として、正しいものは次のうちどれか。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$$

1.  $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$
2.  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$
3.  $\sqrt{3}\pi$
4.  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$
5.  $\frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$