平　成　24　年　度

数　　学（記述式）試　験　問　題（2頁中の1）

（理 工 学 専 攻）

（注意）解答用紙に途中の計算を明記せよ。解答枠の用意されている設問については枠内に解答を記入せよ。

1　2つの関数 $f(x) = x^2 + ax + 2,\ g(x) = -x^2 + bx + 2$ が，$f'\left(\dfrac{a+1}{2}\right) = g'\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$ をみたしている。このとき，次の問に答えよ。ただし，a, b は定数で $a < -1$ とする。

(1) b を a で表せ。

(2) 2つの曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ のすべての共有点について，その x 座標を a の式で表せ。

(3) C_1 と C_2 が囲む部分の面積を S とするとき，S を a で表せ。

(4) $S = \dfrac{7}{3}|a+1| + 2$ となるような a の値を求めよ。

2　平面上のベクトル $\overrightarrow{a_n},\ \overrightarrow{b_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，$\overrightarrow{a_1} = (4, 0),\ \overrightarrow{b_1} = (0, 4)$ と関係式

$$\overrightarrow{a_{n+1}} = \frac{3\overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n}}{4}, \quad \overrightarrow{b_{n+1}} = \frac{\overrightarrow{a_n} - 3\overrightarrow{b_n}}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。さらに原点を O とし，$\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_n},\ \overrightarrow{b_n} = \overrightarrow{\mathrm{OB}_n}$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{a_{n+2}}$ を $\overrightarrow{a_n}$ で表せ。

(3) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ の面積を S_n とするとき，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ の値を求めよ。

(4) $S_1 + S_2 + \cdots + S_n > 21$ をみたす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

3 座標平面上の 3 点 $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$ を頂点とする三角形と 4 点 $(0,t)$, $(0,t-4)$, $(4,t-4)$, $(4,t)$ を頂点とする正方形の共通部分の面積を $S(t)$ とする。このとき, 次の問に答えよ。ただし, $2 \leqq t \leqq 6$ とする。

(1) $S(2)$ と $S(6)$ の値を求めよ。

(2) $S(t)$ を最大にする t の値と, $S(t)$ の最大値 M を求めよ。

(3) $2 \leqq t \leqq 5$ のとき, $S(t) = S(t+1)$ をみたす t の値を求めよ。

4 $\angle \mathrm{ACB}$ が直角の $\triangle \mathrm{ABC}$ において, $\angle \mathrm{BAC}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。また, $\mathrm{AB} = 20$, $\mathrm{BD} = 15$ とする。このとき, 次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ。

(2) 線分 AD の長さを求めよ。

(3) $\triangle \mathrm{ABD}$ の内接円の半径 r と, 外接円の半径 R を求めよ。

5 a を $0 < a < \log 2$ となる定数とし, 曲線 C と直線 l を

$$C : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$l : y = a$$

により定める。このとき, 次の問に答えよ。

(1) C と l および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を S_1 とするとき, S_1 を a で表せ。

(2) C と l および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき, $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

(3) $S = S_1 + S_2$ とするとき, S の値が最小となる a の値を求めよ。