

平成 24 年 度

数 学 (記述式) 試 験 問 題 (2 頁中の 1)

(人文・社会科学専攻)

(注意) 解答用紙に途中の計算を明記せよ。解答枠の用意されている設問については枠内に解答を記入せよ。

1 2つの関数 $f(x) = x^2 + ax + 2$, $g(x) = -x^2 + bx + 2$ が、 $f'\left(\frac{a+1}{2}\right) = g'\left(\frac{a+1}{2}\right)$ をみたしている。このとき、次の間に答えよ。ただし、 a, b は定数で $a < -1$ とする。

- (1) b を a で表せ。
- (2) 2つの曲線 $C_1: y = f(x)$ と $C_2: y = g(x)$ のすべての共有点について、その x 座標を a の式で表せ。
- (3) C_1 と C_2 が囲む部分の面積を S とするとき、 S を a で表せ。
- (4) $S = \frac{7}{3}|a+1| + 2$ となるような a の値を求めよ。

2 平面上のベクトル \vec{a}_n, \vec{b}_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を、 $\vec{a}_1 = (4, 0)$, $\vec{b}_1 = (0, 4)$ と関係式

$$\vec{a}_{n+1} = \frac{3\vec{a}_n + \vec{b}_n}{4}, \quad \vec{b}_{n+1} = \frac{\vec{a}_n - 3\vec{b}_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに原点を O とし、 $\vec{a}_n = \vec{OA}_n$, $\vec{b}_n = \vec{OB}_n$ とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) \vec{a}_2, \vec{b}_2 を求めよ。
- (2) \vec{a}_{n+2} を \vec{a}_n で表せ。
- (3) $\triangle OA_n B_n$ の面積を S_n とするとき、 $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ の値を求めよ。
- (4) $S_1 + S_2 + \dots + S_n > 21$ をみたす最小の自然数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

3 座標平面上の 3 点 $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 6)$ を頂点とする三角形と 4 点 $(0, t)$, $(0, t-4)$, $(4, t-4)$, $(4, t)$ を頂点とする正方形の共通部分の面積を $S(t)$ とする。このとき、次の間に答えよ。ただし、 $2 \leq t \leq 6$ とする。

- (1) $S(2)$ と $S(6)$ の値を求めよ。
- (2) $S(t)$ を最大にする t の値と、 $S(t)$ の最大値 M を求めよ。
- (3) $2 \leq t \leq 5$ のとき、 $S(t) = S(t+1)$ をみたす t の値を求めよ。

4 $\angle ACB$ が直角の $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。また、 $AB = 20$, $BD = 15$ とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $\frac{CD}{AC}$ の値を求めよ。
- (2) 線分 AD の長さを求めよ。
- (3) $\triangle ABD$ の内接円の半径 r と、外接円の半径 R を求めよ。