平 成 2 3 年 度

数　　学 (記述式) 試 験 問 題

(理工学専攻)

(注意) 解答用紙に途中の計算を明記せよ。解答枠の用意されている設問については枠内に解答を記入せよ。

---

1 関数 $f(x) = 4^x - 2^{x+3} - 2^{-x+3} + 4^{-x}$ $(x \geqq 0)$ について, 次の問に答えよ。

(1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくとき, $f(x)$ を t の式で表せ。

(2) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値 m とそのときの x の値を求めよ。

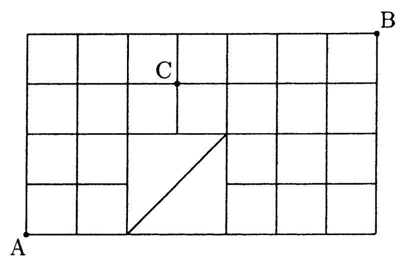
2 放物線 $C : y = x^2$ と直線 $L : y = x - 1$ がある。L 上の点 $\mathrm{A}(a, a-1)$ から C に引いた 2 本の接線の接点を P, Q とし, P, Q の x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha < \beta)$ とする。このとき, 次の問に答えよ。

(1) C 上の点 (t, t^2) における接線の方程式を $y = mx + k$ とするとき, m, k を t の式で表せ。

(2) $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を a の式で表せ。

(3) 放物線 C と 2 本の接線で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とするとき, $\dfrac{S(a)}{\beta - \alpha}$ を a の式で表せ。

3 右の図のような格子状の道および斜めの道がある。次の場合の最短経路は何通りあるか。ただし, 小さいマス目はすべて合同な正方形とする。



(1) A から B まで行く。

(2) A から斜めの道を通らずに B まで行く。

(3) A から C まで行く。

4 $\triangle$ABC 内に

$$6\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

をみたす点 P があるとき, 次の問に答えよ。ただし, 比は最も簡単な整数の比で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき, m, n の値を求めよ。

(2) 直線 AP と辺 BC の交点を D とするとき, 比 BD : DC および AP : PD を求めよ。

(3) 直線 BP と辺 AC の交点を E とするとき, 比 AE : EC を求めよ。

(4) 面積の比 $\triangle$PDC : $\triangle$PCE を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の問に答えよ。

(1) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cos 4t \, dt$ の値を求めよ。

(2) 次の等式が t についての恒等式となるように，定数 a, b, c, d の値を定めよ。

$$\sin^4 t \cos^2 t = a + b\cos 2t + c\cos 4t + d\cos 2t \cos 4t$$

(3) $x = \cos^3 t$ とおいて，定積分 $J = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx$ の値を求めよ。